ベクトル場の発散の同値な定義まとめ

@Hyrodium

2019/03/01 初出
2019/03/05 更新

1　はじめに

ベクトル解析で習ったように, Euclid 空間におけるベクトル場 X の発散は

$$\mathrm{div}(X) = \sum_i \frac{\partial X^i}{\partial x^i} \tag{1}$$

で定義されるのでした. ここで x^i は Euclid 空間の標準的な座標で, X^i はベクトル場の成分です. しかし, 一般の Riemann 多様体上のベクトル場に対してはこのような簡単な偏微分と足し算では定義できません. その代わりに幾つかの等価な定義があります.

- Hodge 作用素を使った定義
- 内部積を使った定義
- Lie 微分を使った定義
- 局所表示を経由した定義
- 共変微分を使った定義

以降では Hodge 作用素による定義を出発点として, 他の定義と一致することを確認していきます. 多少の多様体論の知識を仮定しますが, [1][2] とかが参考になると思います.

2　記法・記号

幾つかの記法をまとめます.

- Einstein 規約
  上下に同じ添字が現れた際に記号 $\sum$ を省略する記法を Einstein 規約と呼びます. 具体的には
  $$\sum_j A^{ij} B_{jk} = A^{ij} B_{jk} \tag{2}$$
  などです.
- テンソルの局所表示
  (r,s) 型テンソル場 T の局所表示は
  $$T = T^{i^1\cdots i^r}_{j^1\cdots j^s} \frac{\partial}{\partial x^{i^1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i^r}} \otimes dx^{j^1} \otimes \cdots \otimes dx^{j^s} \tag{3}$$

のように表します．ここで係数について

$$T^{i^1\cdots i^r}_{j^1\cdots j^s} = T\left(dx^{i^1},\ldots,dx^{i^r},\frac{\partial}{\partial x^{j^1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{j^s}}\right) \tag{4}$$

です．

- 部分的な代入
  複数の引数を取る写像に部分的に変数を代入し, 未代入の部分には · を使うこととします．例えば, 2 変数関数 f の第 1 引数を a に固定して 1 変数関数とした際には

$$f(a,\cdot) \tag{5}$$

  と書きます．本文章においてはこの記法を Riemann 計量に使います．

記号についてもまとめます．

- Kronecker デルタ δ_{ij}
  次を充たす δ_{ij} を Kronecker のデルタと呼びます．

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases} \tag{6}$$

  同様に δ^i_j や δ^{ij} も使います．
- 微分形式 $A^k(M)$
  M 上の k 次微分形式全体を $A^k(M)$ で表します． 1 形式 α^i の楔積 $\wedge$ によって表される k 形式 $\omega = \alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^k$ は次のような写像とします．

$$\omega : \mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)\,;(X_1,\ldots,X_k)\mapsto\frac{1}{k!}\det_{ij}(\alpha_i(X_j)) \tag{7}$$

  ここで $\mathfrak{X}(M)$ は M 上のベクトル場全体です．
- Riemann 計量 g
  $(0,2)$ 型テンソル場 g が各点 $p\in M$ で接空間 T_pM 上に内積 g_p を誘導するとき, g を Riemann 計量と呼びます．
- 双対計量 g^*
  Riemann 計量は各点で余接空間 T^*_pM にも内積を誘導します．このような $(2,0)$ 型テンソルを g^*_p で表します．$(2,0)$ 型テンソル場 g^* の局所表示における係数 g^{*ij} は, Riemann 計量の局所表示における係数 g_{ij} の逆行列となります．つまり

$$g^{*ij}g_{jk} = \delta^i_k \tag{8}$$

  が成り立ちます．
- 正規直交枠
  各点 $p\in U\subset M$ で T_pM の基底を誘導し

$$g(e_i,e_j) = \delta_{ij} \tag{9}$$

  を充たすようなベクトル場の組 $\{e_i\}$ を U 上の正規直交枠と呼びます．

- 双対枠
  各点 $p \in U \subset M$ で $T_p^* M$ の基底を誘導し

$$\langle e_i, \theta^j \rangle = \delta_i^j \tag{10}$$

  を充たすようなベクトル場の組 $\{\theta^i\}$ を $\{e^i\}$ の双対枠と呼びます．双対枠について

$$g^*(\theta^i, \theta^j) = \delta^{ij} \tag{11}$$

  が成り立ちます．
- Hodge 作用素 $*$
  正の向きに並べた双対枠 $\{\theta^i\}$ について, 対応

$$\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^k \mapsto \theta^{k+1} \wedge \cdots \wedge \theta^n \tag{12}$$

  を線形に拡張した写像 $* : A^k(M) \to A^{n-k}(M)$ を Hodge 作用素と呼びます．
- (r, s) 型テンソル
  $p \in M$ における (r, s) 型テンソル空間は

$$T_p^{(r,s)} M = \underbrace{T_p M \otimes \cdots \otimes T_p M}_{r} \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes \cdots \otimes T_p^* M}_{s} \tag{13}$$

  で定義されるものです．M 上の (r, s) 型テンソル束は

$$T^{(r,s)} M = \bigcup_{p \in M} T_p^{(r,s)} M \tag{14}$$

  で定義されるものです．M 上の (r, s) 型テンソル場全体は

$$\mathbf{T}_s^r(M) = \Gamma(T^{(r,s)} M) \tag{15}$$

  で表されます．ここで Γ はベクトル束の切断全体を表す記号です．とくに

$$\mathbf{T}_0^0(M) = C^\infty(M) \tag{16}$$
$$\mathbf{T}_0^1(M) = \mathfrak{X}(M) \tag{17}$$
$$\mathbf{T}_1^0(M) = A^1(M) \tag{18}$$

  が成り立ちます．
- 共変微分
  共変微分というのは, 方向微分を多様上で一般化したもので

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathbf{T}_s^r(M) \to \mathbf{T}_s^r(M) \tag{19}$$

  という写像です．ここで $\mathfrak{X}(M)$ は方向微分における向きを表していて, $\mathbf{T}_s^r(M)$ は微分されるテンソル場です．各点での双線形写像として書き直せば

$$\nabla_p : T_p^{(1,0)} M \times T_p^{(r,s)} M \to T_p^{(r,s)} M \tag{20}$$

  です．これは次の線形写像と同一視できます．

$$\nabla_p : T_p^{(r,s)} M \to T_p^{(r,s)} M \otimes \left(T_p^{(1,0)} M \right)^* \tag{21}$$

ここで $T_p^{(r,s)}M \otimes \left(T_p^{(1,0)}M\right)^* = T_p^{(r,s)}M \otimes T_p^{(0,1)}M = T_p^{(r,s+1)}M$ であるから, つまり

$$\nabla_p : T_p^{(r,s)}M \to T_p^{(r,s+1)}M \tag{22}$$

です．よって, 多様体全体では共変微分は

$$\nabla : \mathbf{T}_s^r(M) \to \mathbf{T}_{s+1}^r(M) \tag{23}$$

なる写像とも同一視されることになります．

3 Hodge 作用素による定義

[1] に倣って, 次で発散を定義することとします．

定義 1. ベクトル場の発散の Hodge 作用素による定義
(M, g) を n 次元 Riemann 多様体, X をその上のベクトル場とする．このとき, X の発散 $\mathrm{div}(X)$ は

$$\mathrm{div}(X) = *d*(g(\cdot, X)) \tag{24}$$

で定義される．[*1]

この定義は天下り的で何をやってるのか最初はよく分かりませんが, 図式で表すと次のようになります．

$$\begin{tikzcd}
A^0(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & A^1(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[rr, bend left, "*"] & \cdots \arrow[r, "d"] & A^{n-1}(M) \arrow[r, "d"] & A^n(M) \arrow[llll, bend right, "*"'] \\
C^\infty(M) & \mathfrak{X}(M) & & &
\end{tikzcd} \tag{25}$$

ここで使える道具は

- Riemann 計量による同型 $\mathfrak{X}(M) \simeq A^1(M)$
- Hodge 作用素 $* : A^k(M) \to A^{n-k}(M)$
- 外微分 $d : A^k(M) \to A^{k+1}(M)$
- 関数と 0 次微分形式 $C^\infty(M) = A^0(M)$

のみを考えています．やりたいことは「1 度だけ微分 d を通って $\mathfrak{X}(M)$ から $C^\infty(M)$ までを繋ぐ」ということなので, そのための道 (合成の順番) は 1 つに決まります．[*2] それが定義 1 だったという訳です．

[*1] 記号の注意で述べたように, $g(\cdot, X)$ は片方だけ変数を潰す記法です．これは添字の上げ下げと同じ操作です．

[*2] ベクトル解析で登場した grad や rot も同様に考えて多様体上で定義されます．grad では「1 度だけ微分 d を通って $C^\infty(M)$ から $\mathfrak{X}(M)$ までを繋ぎたい」なので $\mathrm{grad}(f) = g^*(\cdot, df)$ で定義されます．rot では「1 度だけ微分 d を通って $\mathfrak{X}(M)$ から $\mathfrak{X}(M)$ までを繋ぎたい」なのですが, これができるのは $n = 3$ のみです．

$$\begin{tikzcd}
A^0(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & A^1(M) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\wr"] & A^2(M) \arrow[r, "d"] \arrow[l, bend right, "*"'] & A^3(M) \\
C^\infty(M) & \mathfrak{X}(M) & &
\end{tikzcd} \tag{26}$$

つまり $\mathrm{rot}(X) = g^*(\cdot, *d(g(\cdot, X)))$ で定義されます．

注意. ベクトル解析における発散との一致

Hodge 作用素による $\mathrm{div}(X)$ の定義がベクトル解析でのそれと一致することを確認しておきましょう．M を n 次元 Euclid 空間, $\{x^i\}$ をその標準座標とします．このとき, Riemann 計量の局所表示は

$$g = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j \tag{27}$$

となります．よって双対枠について

$$\theta^i = dx^i \tag{28}$$

です．ベクトル場 X も同様に

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{29}$$

のように局所表示します．このとき

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(X) &= *d*(g(\cdot, X)) \\
&= *d*(\delta_{ij} dx^i \otimes dx^j(\cdot, X)) \\
&= *d*(\delta_{ij} dx^i(\cdot) \cdot dx^j(X) \\
&= *d*\left(\delta_{ij} dx^j \left(X^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) dx^i\right) \\
&= *d*(\delta_{ij} X^j \theta^i) \\
&= *d\left(\sum_i \delta_{ij} X^j \cdot (-1)^{i-1} \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^{i-1} \wedge \theta^{i+1} \wedge \cdots \wedge \theta^n\right) \\
&= *\left(\sum_i \delta_{ij} \frac{\partial X^j}{\partial x^i} (-1)^{i-1} \theta^i \wedge \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^{i-1} \wedge \theta^{i+1} \wedge \cdots \wedge \theta^n\right) \\
&= *\left(\sum_i \delta_{ij} \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n\right) \\
&= \frac{\partial X^i}{\partial x^i}
\end{aligned} \tag{30}$$

が成り立ちます．つまり, ベクトル解析での定義 (1) と一致することが確認できました.

4 等価な定義

定理 2. ベクトル場の発散と内部積

υ_M を Riemann 多様体 M の体積要素とし, $i_X : A^k(M) \to A^{k-1}(M)$ を内部積とする．このとき

$$\mathrm{div}(X)\upsilon_M = d(i_X(\upsilon_M)) \tag{31}$$

が成り立つ.

証明. $*\upsilon_M = 1$ でしたから

$$i_X(\upsilon_M) = *g(\cdot, X) \tag{32}$$

の成立を示せば良いことになります．両辺は X について各点で線形なので正規直交枠 $\{e_i\}$ でバラして

$$i_{e^i}(\upsilon_M) = *g(\cdot, e^i) \tag{33}$$

を示せば十分です．両辺は $n-1$ 次微分形式なので，これらが写像として等しいことを確認すれば十分です．まずは $i=1$ につして確認します．引数には $e_2, \ldots, e_n$ を与えれば十分です．左辺を整理して

$$i_{e^1}(\upsilon_M)(e_2, \ldots, e_n) = n\, \upsilon_M(e_1, e_2, \ldots, e_n) = n\, \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} \tag{34}$$

です．右辺を整理して

$$*g(\cdot, e^1)(e_2, \ldots, e_n) = *\theta^1(e_2, \ldots, e_n) = \theta^2 \wedge \cdots \wedge \theta^n(e_2, \ldots, e_n) = \frac{1}{(n-1)!} \tag{35}$$

です．よって $i_{e^1}(\upsilon_M) = *g(\cdot, e^1)$ が分かりました．他の e^i に対しても同様で，結局

$$\mathrm{div}(X)\upsilon_M = d(i_X(\upsilon_M)) \tag{36}$$

が示せました． □

定理 3. ベクトル場の発散と Lie 微分

$\mathcal{L}_X$ を X による Lie 微分とする．このとき

$$\mathrm{div}(X)\upsilon_M = \mathcal{L}_X(\upsilon_M) \tag{37}$$

が成り立つ．

証明．一般に $X \in \mathfrak{X}(M), \omega \in A^k(M)$ に対して

$$\mathcal{L}_X(\omega) = (i_X d + d i_X)(\omega) \tag{38}$$

が成り立ちます (Cartan の公式)．よって

$$\mathcal{L}_X(\upsilon_M) = (i_X d + d i_X)(\upsilon_M) = d i_X(\upsilon_M) \tag{39}$$

なので，内部積に関する定理 2 より

$$\mathrm{div}(X)\upsilon_M = \mathcal{L}_X(\upsilon_M) \tag{40}$$

が得られます． □

定理 4. ベクトル場の発散の局所表示

Riemann 計量が $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$，ベクトル場が $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ と局所表示されているとする．このとき発散は

$$\mathrm{div}(X) = \frac{1}{\sqrt{\det_{ij}(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(X^k \sqrt{\det_{ij}(g_{ij})} \right) \tag{41}$$

と表示される．

証明．体積要素 υ_M は

$$\upsilon_M = \sqrt{\det_{ij}(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \tag{42}$$

と局所表示されるのでした．よってこれの Lie 微分に座標基底を入れると

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(\upsilon_M)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) &= \mathcal{L}_X\left(\sqrt{\det_{ij}(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \\
&= X\left(\sqrt{\det_{ij}(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)\right) \\
&\quad - \sum_i \sqrt{\det_{ij}(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \left[X, \frac{\partial}{\partial x^i}\right], \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \\
&= X\left(\sqrt{\det_{ij}(g_{ij})}\frac{1}{n!}\right) - \sum_i \sqrt{\det_{ij}(g_{ij})}\frac{1}{n!} dx^i\left(\left[X^k\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right]\right) \\
&= X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det_{ij}(g_{ij})}\frac{1}{n!}\right) + \sqrt{\det_{ij}(g_{ij})}\frac{1}{n!}\frac{\partial X^i}{\partial x^i} \\
&= \frac{1}{n!}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det_{ij}(g_{ij})} X^i\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det_{ij}(g_{ij})} X^i\right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det_{ij}(g_{ij})}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det_{ij}(g_{ij})} X^i\right) \upsilon_M\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)
\end{aligned} \tag{43}$$

のようになります．ただし k 形式 ω の X による Lie 微分は

$$\mathcal{L}_X(\omega)(X_1, \ldots, X_k) = X\omega(X_1, \ldots, X_k) - \sum_{i=1}^{k} \omega(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots, X_k) \tag{44}$$

として定義されるのでした．括弧積については

$$Y = \frac{\partial}{\partial x^i} = Y^i\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{45}$$

$$Y^k = \begin{cases} 1 & (k = i) \\ 0 & (k \neq i) \end{cases} \tag{46}$$

$$[X, Y] = \left[X^k\frac{\partial}{\partial x^k}, Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right] = \left(X^k\frac{\partial Y^j}{\partial x^k} - Y^k\frac{\partial X^j}{\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} = -\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{47}$$

として計算しました．よって Lie 微分との関係 (定理 3) と見比べれば

$$\operatorname{div}(X) = \frac{1}{\sqrt{\det_{ij}(g_{ij})}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(X^k\sqrt{\det_{ij}(g_{ij})}\right) \tag{48}$$

が示せたことになります． □

定理 5. ベクトル場の発散と共変微分
ベクトル場 X の共変微分 ∇X は $(1,1)$ 型テンソル場である．その縮約を取ったものは発散に一致する．つまり

$$\mathrm{div}(X) = (\nabla X)^i_i \tag{49}$$

である．

証明． まず，ベクトル場 X の共変微分の局所表示は

$$\nabla X = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} X^k \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \tag{50}$$

です．ここで Γ^i_{jk} は Christoffel 記号であり

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{*il} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \tag{51}$$

を充たします．よって縮約を取れば

$$\begin{aligned}
(\nabla X)^i_i &= \nabla X \left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\
&= \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ik} X^k \\
&= \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2} g^{*il} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right) X^k \\
&= \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2} g^{*il} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} X^k
\end{aligned} \tag{52}$$

となります．一方，発散の局所表示 (定理 4) を整理すれば

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(X) &= \frac{1}{\sqrt{\det_{ij}(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(X^k \sqrt{\det_{ij}(g_{ij})} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det_{ij}(g_{ij})}} \left(\sqrt{\det_{ij}(g_{ij})} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(X^k \right) + X^k \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{\det_{ij}(g_{ij})} \right) \right) \\
&= \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{X^k}{\sqrt{\det_{ij}(g_{ij})}} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{\det_{ij}(g_{ij})} \right) \right) \\
&= \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{X^k}{\sqrt{\det_{ij}(g_{ij})}} \left(\frac{1}{2\sqrt{\det_{ij}(g_{ij})}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\det_{ij}(g_{ij}) \right) \right) \\
&= \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \frac{X^k}{\det_{ij}(g_{ij})} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\det_{ij}(g_{ij}) \right) \right) \\
&= \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \frac{X^k}{\det_{ij}(g_{ij})} \left(\det_{ij} \left(g_{ij} \right) g^{*il} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} \right) \\
&= \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2} g^{*il} \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} X^k
\end{aligned} \tag{53}$$

です．ここで t を変数とする行列式 $\det_{ij}(A_{ij})$ の微分に関する公式

$$\frac{d}{dt} \det_{ij}(A_{ij}) = \det_{ij}(A_{ij}) \sum_{i,j} A^{-1}_{ij} \frac{dA_{ji}}{dt} \tag{54}$$

を使っていました．よって

$$\mathrm{div}(X) = (\nabla X)^i_i \tag{55}$$

が成り立ちます． □

5 まとめ

ベクトル場の発散についての定義を確認してきました．これらの特徴を挙げると以下のようになります．

- Hodge 作用素
  - 局所座標に非依存であることが一目で分かるので, 定義としては悪くない．
- 内部積
  - 筆者の内部積の理解が弱いので, よく分からない..
- Lie 微分
  - 幾何学的な直観が働きやすい．
- 局所表示
  - 計算しやすい．局所表示の安心感がある．
- 共変微分
  - ベクトル解析での定義 $\partial X^i/\partial x^i$ との類似のために見通しが良い．
  - 一般の (r, s) 型のテンソル場の発散にも拡張しやすい．

6 一般のテンソル場の発散

ベクトル場 X の発散について, $(1, 0)$ 型テンソル場 X の共変微分を取ることで $(1, 1)$ 型テンソル場 ∇X を構成し, その縮約を取った $(0, 0)$ 型テンソル場 $(\nabla X)^i_i$ が発散に一致していたのでした．一般に, 共変微分は $\nabla : \mathbf{T}^r_s(M) \to \mathbf{T}^r_{s+1}$ なる写像でしたので, (r, s) 型テンソル場についても $r \geq 1$ であれば同様に発散が定義されることになります．

$$\mathbf{T}^r_s(M) \xrightarrow{\nabla} \mathbf{T}^r_{s+1}(M) \xrightarrow{\text{縮約}} \mathbf{T}^{r-1}_s(M) \tag{56}$$

ただしベクトル場の場合とは異なり, 縮約を取る場所に任意性が入るためにその定義は一意的ではありません．

さて, 共変微分を使うことで一般のテンソル場の発散が定義できることが分かったので, 次に気になるのは「ベクトル場のように同値な定義を複数構成できるか」という問題です．ここは筆者がまだ分かっていない所でして, 知っている方は教えて欲しいです．

参考文献

[1] 森田茂之, 微分形式の幾何学, 岩波書店 (2005)

[2] 西川青季, 幾何学的変分問題, 岩波書店 (2006)