



UNIVERSIDAD  
DE LOS ANDES  
VENEZUELA

PROYECTO DE GRADO

PRESENTADO ANTE LA ILUSTRE UNIVERSIDAD DE LOS ANDES COMO REQUISITO  
PARCIAL PARA OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO DE SISTEMAS

SINCRONIZACIÓN EN UN MODELO DE  
ACTIVIDAD NEURONAL BASADO EN  
MAPAS CAÓTICOS SOMETIDOS A  
PERTURBACIONES

POR

BR. CLAUDIO S. CONDOR D.

TUTOR: DR. KAY TUCCI

Enero 2017

Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela

# Sincronización en un modelo de actividad neuronal basado en mapas caóticos sometidos a perturbaciones

Br. Claudio S. Condor D.

Propuesta de Proyecto de Grado  
Departamento de Control y Automatización  
Escuela de Ingeniería de Sistemas, Universidad de los Andes

**Resumen:** Uno de los fenómenos que se observa en las redes neuronales es el de sincronización que ocurre cuando las neuronas ajustan su ritmo y su frecuencia entre sí. Clínicamente este fenómeno está relacionado con enfermedades neurológicas como la epilepsia y el párkinson. Por medio de un modelo neuronal basado en un mapa caótico propuesto por Chialvo, se recrea el fenómeno de sincronización neuronal en redes plásticas. Se determina la posibilidad de mantener la red de neuronas desincronizada, con la aplicación de perturbaciones externas a los elementos de la red siguiendo cuatro estrategias de selección espacial y temporal. Para todas las estrategias se construye el diagrama de fases en el espacio de los parámetros de control.

**Palabras Clave:** Sincronización, Neuronas, Control , Redes , Epilepsia

# Agradecimientos

Primeramente quisiera dar las gracias a Dios, ya que ha sido el quien me ha puesto en los caminos de mi vida a personas muy importantes, que sin su apoyo, ánimos y consejos habría podido llegar a esta etapa de mi vida.

Le doy las gracias a mis padres Elsa y Claudio, cuyo esfuerzo, sacrificio y apoyo son los que me permitieron cumplir este logro, no solamente con un apoyo tangible y físico, si no que con su experiencia me dieron el carácter y la perseverancia necesaria para este logro profesional, que es mas suyo que mio. También a mis segundos padres mi hermano José Luis y su esposa Thayna, los cuales me recibieron en su casa en la ciudad de Mérida durante mis años de estudio en la universidad y que con sus consejos logre crecer aun mucho mas como persona y esto me permitió no rendirme y seguir adelante en el transcurso de mi carrera.

Son muy pocas las personas que se vuelven realmente importantes en la vida y aun menos lo son las que se les puede llamar hermano, así es en particular Crissael, a quien considero ahora mi hermana, gracias por siempre estar presente y apoyarme en los momentos difíciles.

Quisiera dar las gracias a todos mis profesores , que sin los cuales hubiera sido imposible conseguir este logro, en particular quisiera agradecer al profesor Mario Spinetti, que fue gracias a sus consejos que decidí estudiar control y automatización aunque ya había empezado la rama de sistemas computacionales, y que con su experiencia me dio una idea de lo realmente es el trabajo de un ingeniero. A mi tutor, el Dr. Kay Tucci por su apoyo y paciencia, durante el transcurso de esta investigación cuya experiencia en el estudio de sistemas complejos fue de vital importancia para que el día de hoy este finalizado este proyecto de grado.

Y de manera especial quisiera agradecer a mi prometida Boney, quien a pesar

de las discusiones que tuvimos por tener diferentes maneras de hacer las cosas, me tuvo paciencia y me acompañó hasta el final con sus consejos y experiencia en la redacción, para la culminación de este proyecto de grado.

A todas las personas que de alguna manera me brindaron su ayuda para este logro, y que mi mente se niega a recordar, gracias.

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Indice General</b>                                | <b>vi</b> |
| <b>1. Introduccion</b>                               | <b>1</b>  |
| 1.1. Antecedentes . . . . .                          | 3         |
| 1.2. Planteamiento del Problema . . . . .            | 4         |
| 1.3. Objetivos . . . . .                             | 6         |
| 1.3.1. Objetivo general . . . . .                    | 6         |
| 1.3.2. Objetivos Específicos . . . . .               | 6         |
| 1.4. Justificación . . . . .                         | 6         |
| 1.5. Metodología . . . . .                           | 8         |
| 1.6. Alcance . . . . .                               | 8         |
| <b>2. Marco teórico</b>                              | <b>10</b> |
| 2.1. Sistemas dinámicos . . . . .                    | 10        |
| 2.1.1. Teoría del caos . . . . .                     | 11        |
| 2.2. Modelo neuronal de chialvo . . . . .            | 11        |
| 2.3. Sincronización . . . . .                        | 16        |
| 2.4. Redes . . . . .                                 | 17        |
| 2.5. Redes de mapas acoplados . . . . .              | 18        |
| 2.6. Plasticidad del sistema nervioso . . . . .      | 19        |
| <b>3. Diseño e implementación del modelo</b>         | <b>23</b> |
| 3.1. Sincronización y desincronización . . . . .     | 25        |
| 3.2. Aplicación de Perturbaciones Externas . . . . . | 29        |

|               |    |
|---------------|----|
| 4. Conclusión | 39 |
| Bibliografía  | 42 |

# Capítulo 1

## Introduccion

La sincronización es un fenómeno que puede estar presente en la dinámica de sistemas compuestos por elementos osciladores. Este fenómeno tiene un papel importante en distintos campos de las ciencias, como lo son la Biología[66], Ecología [9], Climatología[55], Tecnología[29], llegando incluso hasta las Artes[5]. Se han realizado experimentos donde se observa sincronización en comunicación[25], el trabajo en conjunto de personas[51], en donde la interacción de los individuos se manifestaba por medio de una conversación, el entonar una canción o simplemente imitar ritmos y sonidos, también donde no estaba presente ningún tipo de instrucción dada a los individuos con anterioridad[69, 70], sino que espontáneamente se manifestaba distintos tipo de sincronía entre los individuos.

Entre los esfuerzos científicos por entender el fenómeno de la sincronización, existen varios trabajos que han sido de vital importancia. Comenzando en 1665 con el trabajo del matemático y físico C. Huygens, inventor del reloj de péndulo, quien descubrió una “extraña conexión” que existía entre dos péndulos colgados uno al lado del otro[20]; los péndulos se movían exactamente con la misma frecuencia y tenían un retardo de fase de 180 grados; además, cuando estos eran sometidos a una perturbación, el estado de retardo fase de 180 grados se restauraba en aproximadamente media hora y así, continuaba la oscilación de los péndulos indefinidamente. Huygens dedujo, que tal fenómeno ocurría debido a la interacción entre los dos relojes de péndulo mediante movimientos imperceptibles que se transmitían a través del soporte común del cual estaban suspendidos los relojes. Es a partir de ese momento

que los científicos pusieron su atención en el estudio de este fenómeno.

El obituario de Arthur T. Winfree, resume lo que se considera como el comienzo del estudio moderno del fenómeno de sincronización en una población de individuos que interactúan entre sí:

*“Wiener [71] postuló el siguiente problema en su libro *Cybernetics* ¿Cómo es posible que miles de neuronas, luciérnagas o grillos, pueden repentinamente activarse, parpadear o cantar al mismo tiempo sin la existencia de algún líder o señal alguna del ambiente que las rodea? Sin embargo Wiener no hizo grandes avances matemáticos en ello, realmente nadie más lo hizo hasta el trabajo de Winfree”.*[61]

Ahora bien, Winfree construye la primera modelización matemática de la sincronización. Winfree observó un comportamiento cooperativo en una gran población de osciladores biológicos con ciclo límite[72] y frecuencias intrínsecas distribuidas alrededor de un valor promedio. Descubrió que, cuando la distribución de las frecuencias de los osciladores era grande y el acoplamiento débil, los osciladores actuaban incoherentemente; cada uno manteniéndose cerca de su propia frecuencia natural siendo cada una diferente. Contrariamente, ocurría un fenómeno de sincronización espontáneo cuando a dicha población de osciladores se le iba reduciendo la varianza de frecuencias y aumentando el acoplamiento[73]. Por tanto, podemos decir que, el fenómeno de sincronización ocurre cuando un grupo de osciladores autónomos ajustan sus ritmos volviéndose cada vez más similares debido a la presencia de una interacción entre ellos[49].

Este comportamiento descrito por Winfree, llamo la atención de Yoshiki Kuramoto quien comenzó á estudiar este fenómeno en 1975[41], mediante un modelo conocido como el Modelo de Kuramoto. En su trabajo Kuramoto asumió que los osciladores que formaban estos sistemas eran prácticamente idénticos y estaban débilmente acoplados entre sí. Este modelo ha sido usado para describir el fenómeno de sincronización, en grandes grupos de osciladores acoplados[62], y se han encontrado aplicaciones en el área de la neurociencia[11, 14, 19]. Más tarde, en 1990 Louis Pecora y Thomas Carrol[48] aplicaron estas ideas a un grupo de circuitos caóticos haciendo que los osciladores se sincronicen en una órbita caótica común a todos ellos.

El cerebro humano, compuesto fundamentalmente por neuronas, puede representarse como un sistema formado por osciladores autónomos y posiblemente caóticos,

en donde la interacción de una cantidad multitudinaria de estos elementos sucede mediante señales eléctricas y sustancias químicas como neurotransmisores. Se ha comprobado que en el cerebro puede ocurrir parcialmente el fenómeno de sincronización, el cual se muestra como un elemento central en la unificación de la actividad cerebral y en la emergencia de nuestra conciencia[13, 59]. También parece ser fundamental en el desarrollo del pensamiento, atención, memoria, acciones motoras y en la capacidad de percibir estímulos externos e internos de forma balanceada y unificada. La disfunción de estos mecanismos podría dar cuenta de las alteraciones y patologías como la epilepsia, la esquizofrenia y el párkinson.

## 1.1. Antecedentes

La sincronización caótica es un fenómeno que puede estar presente en el comportamiento de algunos sistemas dinámicos. Su estudio ha impactado diversas áreas como la biología, las comunicaciones[75] y el control de sistemas dinámicos[74].

Se ha estudiado la sincronización caótica de manera experimental en sistemas de comunicación formados por lasers caóticos [64] y la comunicación por fibra óptica usando un análisis del dominio espectral [6]. También se realizaron trabajos donde se manifiestan otros tipos de sincronización caótica: la sincronización completa[27, 45], generalizada [54, 76], con retardo[63] y de fase imperfecta [52]. También se han hecho estudios en donde se lograron aplicaciones experimentales en las áreas de la óptica no lineal y la dinámica de fluidos[10].

Por otra parte, se han hecho estudios de sincronización caótica en redes, donde se expone, que dicho fenómeno requiere la presencia de una relación funcional diferente a la identidad entre los elementos que componen la red, la cual es establecida entre el subsistema de forzamiento y el subsistema de respuesta [1, 32, 46]. Otra de las características que ha sido analizada, son las condiciones mínimas necesarias que se requieren para la aparición del fenómeno de sincronización caótica en sistemas formados por mapas caóticos acoplados, que es observada en una gran variedad de sistemas complejos [18, 42], Por ejemplo: una red aleatoria dirigida, donde se ha encontrado que el factor de acoplamiento requerido para que la sincronización ocurra se manifiesta débil, cuando la fracción de conexiones dirigidas se aumenta[23].

En cuanto al campo de sistemas complejos; como lo representa el cerebro humano, se han propuesto varios modelos que buscan imitar la capacidad que tienen los sistemas complejos de cambiar y aprender de la experiencia. Entre ellos tenemos, la teoría Hebbiana, que se encuentra fundamentada en el mecanismo de hacer que la red de neuronas respondan con un procedimiento de cambio o adaptaciones ante lo que se denomina un "proceso de aprendizaje"[28]; otro modelo corresponde a la propuesta de una variación de los pesos con respecto al tiempo de las conexiones entre los elementos[33]; un tercer modelo registra un proceso de sinapsis o interacción entre los elementos que se consideraban más "fuertes" y poder propiciar su propagación[17], y por último, pero no menos importante, un modelo que presenta la interacción que hay en los mapas acoplados de una red, éste consiste en exclusivamente en dos acciones: conexión y desconexión, la cual depende de una comparación, que se hace entre los estados de los elementos que componen la red[30].

Por otra parte, se han realizado investigaciones del fenómeno de sincronización en redes formadas por modelos activos de neuronas, como el propuesto por Chialvo [16] o el propuesto por Rulkov[53], Este último realizó un análisis cuyo resumen expone un modelo por el cual imitaba el proceso de sincronización que se encuentra en las neuronas biológicas reales. También se estudió el efecto que tiene la variación de la fuerza de acoplamiento, en una red formada por mapas acoplados, que siguen el modelo propuesto por Chialvo. Se advirtió, que en presencia de un aumento exponencial de la fuerza de acoplamiento, con respecto a sus acoplos aleatorios, ocurría el fenómeno de sincronización. [34] Usando nuevamente el modelo de Chialvo se examinó, el fenómeno de sincronización en una red de mapas acoplados, donde se establecieron sub-poblaciones de tamaños distintos y dinámicas intrínsecas propias. Por tanto, se pudo observar la influencia que tenía uno de los grupos en el otro, provocando desincronización o sincronización entre ellos. [35].

## 1.2. Planteamiento del Problema

En los sistemas dinámicos sobre redes complejas se pueden dar diversos fenómenos entre ellos la sincronización. En particular la sincronización en las redes neuronales puede ocurrir en muchos niveles diferentes, desde un par de neuronas ubicadas a corta

distancia, hasta grandes grupos neuronales localizados en diferentes hemisferios. A pesar de los diferentes niveles en los que las neuronas se conectan para lograr una sincronización estable, primero es necesario que establezcan un patrón de actividad oscilatoria, que ha demostrado ser una propiedad intrínseca de grupos neuronales[13].

Por otra parte, la sincronía neuronal no sólo es importante para unir funcionalmente a grupos de neuronas separadas entre sí, sino también es esencial para poder realizar una comunicación efectiva a través de todo el cerebro, convirtiéndose entonces, en parte crucial de los procesos de aprendizaje[57], verbales[7], cognitivos [67], sensoriales y para el mando de control de los sistemas que necesitan marchar en el organismo, tales como los sistemas: respiratorio[56], circulatorio y endocrino[12]. Sin embargo también se ha comprobado que la hiper-sincronía cerebral se encuentra íntimamente relacionada con los comportamientos inusuales, patologías o enfermedades de origen neurológico, tales como: las alucinaciones visuales y auditivas acompañadas con ideas delirantes de convencimiento y certeza, cuyo cuadro sintomático se relaciona con esquizofrenia paranoide [3, 24]. También se relaciona con las fases maníacas y depresivas propias de los trastornos bipolares[2], ataques de pánico[4], crisis de pérdida de personalidad o desorientación e impulsos suicidas[22] y ataques convulsivos propios de la epilepsia [65]. Es por esto que algunos experimentos han centrado su atención en el significado de los procesos de desincronización. Estos períodos de actividad des-coordinada permitirían pasar de un estado cognitivo a otro y se piensa que serían un mecanismo importante para el funcionamiento cerebral[68].

Siguiendo en este orden de ideas, este trabajo tiene como finalidad presentar un estudio en el campo de los sistemas complejos de redes neuronales en dónde busca establecer criterios para controlar comportamiento "sincronizado/desincronizado", mediante la aplicación de perturbaciones externas, aplicadas a modelos de redes neuronales, donde nos lleva inevitablemente a plantear la siguiente interrogante, ¿Es factible el uso de perturbaciones externas para evitar el comportamiento propio de la sincronización generado en las redes neuronales del cerebro?.

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. Objetivo general

*Estudiar el fenómeno de sincronización en sistemas de osciladores caóticos excitables sometidos a perturbaciones*

### 1.3.2. Objetivos Específicos

1. Analizar algunos modelos de neuronas basados en mapas caóticos.
2. Investigar el fenómeno de sincronización.
3. Examinar algunos mecanismos para la dinámica de los pesos de las sinapsis entre las neuronas.
4. Implementar una red de mapas acoplados.
5. Someter a la red de mapas acoplados a perturbaciones de diferentes intensidades y frecuencia siguiendo diversas estrategias, para construir los diagramas de fases del sistema.

## 1.4. Justificación

La aplicación del fenómeno de sincronización en las ciencias sociales y la economía, ha llevado a descubrir comportamientos interesantes, algunos ejemplos son: la capacidad de formar consensos, bajo un mismo criterio o perspectiva, permitiendo el desarrollo de una opinión unánime en un contexto social donde interactúan cualquier cantidad de personas (elementos). Vale destacar que son pocas las formulaciones claras de la existencia de este fenómeno, mas sin embargo, no por ello dejan de ser significativamente importantes para abrir las puertas a futuras investigaciones en este tema.

Por otra parte, en la ingeniería y la computación, el estudio del fenómeno de sincronización representa suma importancia en el campo de la computación paralela y distribuida, minería de datos, comunicaciones inalámbricas, logística descentralizada,

redes de distribución eléctrica etc. Dado que estos sistemas cada vez son más y más grandes, también su complejidad aumenta, por lo tanto se proponen con más interés y frecuencia, técnicas de simulación y agrupamiento basadas en el fenómeno de sincronización.

El fenómeno de sincronización también se encuentra presente en el campo de la biología desde escala molecular [21] hasta las grandes poblaciones en los casos de redes genéticas, ritmos circadianos [47], y particularmente en el estudio de las redes neuronales del cerebro, ya que está presente y se cree que éste tiene un rol crucial en los procesos cognitivos, como lo son el proceso de aprendizaje [58], la memoria [39], la capacidad musical [15], etc.

Ahora bien, esta sincronización presente en las redes neuronales del cerebro, también se encuentra ligada enfermedades de origen cerebral como la epilepsia, esquizofrenia y el síndrome de párkinson. Tomando en cuenta esa relación es evidente que el estudio de este fenómeno es de utilidad. Para ayudar a determinar como el cerebro podría mantener niveles equilibrados de sincronización, ó para contribuir al análisis de datos de las actividades patológicas del cerebro, por ejemplo en predecir la presencia de enfermedades antes de que sean muy graves o crónicas, de modo que se pueda diseñar métodos adecuados para el tratamiento a partir de un diagnóstico oportuno.

Por lo anteriormente expuesto, el presente trabajo de grado pretende estudiar el fenómeno de sincronización en las redes neuronales, usando un modelo activo de neuronas y de esta manera determinar un criterio de control adecuado en donde se pueda evitar que el sistema, entre en un estado de sincronización, el cual ha de considerarse no deseable. Los ataques de epilepsia caracterizan uno de esos comportamientos no deseables producto de la sincronización, por tanto mantener dicha red neuronal en un estado de desincronización habrá de resultar en un posible planteamiento teórico, donde la implementación de un dispositivo cuyo funcionamiento sea similar al de un marcapasos cerebral sea factible y viable.

## 1.5. Metodología

La metodología del presente trabajo de grado consiste en una revisión bibliográfica sobre la teoría de redes plásticas, el modelo neuronal de Chialvo y de diversas investigaciones acerca del fenómeno de sincronización de estos modelos con el fin de identificar ecuaciones y parámetros necesarios para la simulación de estas redes, mediante el uso de un computador. Para esto se hacen recopilaciones de diversos textos y artículos cuyo contenido sea abundante en fundamento teórico para el tema de investigación que representa el trabajo en cuestión.

Luego se procedió a realizar la simulación de las distintas redes neuronales, variando sus parámetros de acoplamiento y la dinámica de interacción de las neuronas (Sinapsis), determinando cuando éstas presentan sincronización de manera espontánea y cuando no.

En base a estos resultados se procedió a aplicar perturbaciones externas de distinta frecuencia e intensidad para determinar las condiciones necesarias para mantener la red en un estado de desincronización, formando los distintos diagramas de fases.

## 1.6. Alcance

El proyecto que se plantea en la siguiente investigación tiene las siguientes limitaciones. Por una parte se debe tomar en cuenta que los modelos matemáticos planteados no modelan el comportamiento completo de una neurona biológica y tampoco la completa interacción o sinapsis que ocurre entre ellas sin embargo, este es suficiente para el estudio teórico del presente proyecto.

En cuanto a la delimitación se refiere el modelo matemático de neuronal de Chialvo, pueden reproducir de manera general algunos de los comportamientos de las neuronas naturales como los disparos de la ráfaga de picos, y con la correcta selección de los parámetros del modelo cada neurona de manera aislada presenta un ciclo-limite lo cual es necesario para que se presente el fenómeno de sincronización en un grupo de ellas, teniendo así la capacidad para reproducir el comportamiento colectivo de un gran número de neuronas por el medio del uso de redes complejas, lo cual logra describir el comportamiento obtenido de manera experimental en grupos de neuronas reales.

Se debe tomar en cuenta que el presente proyecto no pretende el planteamiento de un criterio de control definitivo para el diseño y la aplicación de este de manera experimental debido a que no se posee una red de neuronas in vitro, para la debida prueba de este. Por el contrario, pretende expandir la posibilidad de un estudio más exhaustivo y experimental con mayor documentación teórica.

# Capítulo 2

## Marco teórico

Según Mendez (2011), el marco teórico corresponde a la descripción de los elementos teóricos que han de fundamentar los procesos de conocimiento que edifican dicha investigación. En primer lugar para ubicar el tema objeto de análisis dentro de documentación y teorías ya existentes, de manera que se logre precisar en que línea de pensamiento ésta se inscribe y determinar en que medida representa algo nuevo o complementario. En segundo lugar, consiste en una descripción detallada de cada concepto, teoría o elemento que serán directamente utilizadas en el desarrollo del respectivo trabajo de grado.

### 2.1. Sistemas dinámicos

Una forma de estudiar sistemas físicos, es creando modelos mediante el uso de un conjunto de reglas y ecuaciones con el fin de describir la dependencia con el tiempo de la posición de un punto con respecto a su espacio de fases. Los sistemas dinámicos pueden ser; lineales y no-lineales. También la evolución temporal de un sistema dinámico puede representarse de una manera continua, mediante ecuaciones diferenciales, o de manera discreta, mediante ecuaciones en diferencias, más comúnmente llamadas mapas.

A un sistema se le llama lineal porque presenta un conjunto de propiedades que lo hace simple y predecible, estas propiedades son: la homogeneidad, que se refiere a que un cambio de amplitud en la señal de entrada produce un cambio proporcional

en la salida; y el principio de superposición que dice que la suma de dos salidas del sistema, generadas por dos señales de entrada, es igual a la salida generada por la suma de las dos señales de entrada[44].

En cambio es sabido que la no linealidad es la responsable de comportamientos complejos, impredecibles o caóticos. En los sistemas no lineales un cambio de la condición inicial, lleva a un cambio en la evolución del sistema que no es proporcional al cambio que se hizo en el tiempo inicial[38]. Se diferencian de los sistemas lineales que cumplen con el principio de superposición y por esto pueden ser divididos y estudiados por partes para luego combinar las soluciones obtenidas y así tener una solución completa,, para los sistemas no lineales esto no se cumple por lo que ellos deben ser tratados y estudiados con toda su complejidad.

### **2.1.1. Teoría del caos**

La teoría del caos estudia los sistemas dinámicos deterministas que presentan un comportamiento sensible a las condiciones iniciales[31]; es decir, que conocida la trayectoria del sistema una perturbación infinitesimal de las condiciones iniciales, hace que la evolución del sistema sea totalmente distinta, y en consecuencia se vuelve imposible obtener una predicción de un estado en un tiempo futuro lejano del sistema. El término “Caos” se usa generalmente para hablar de desorden, sin embargo Edward Lorenz como : “Cuando el presente determina el futuro, pero el presente aproximado no determina una aproximación del futuro”. [43] Para que exista una dinámica caótica, el sistema debe tener las siguientes propiedades: Debe existir un comportamiento oscilatorio; la dinámica debe ser no lineal, determinista y generalmente disipativa; el sistema debe ser sensible a una pequeña variación en las condiciones iniciales.

Bajo estas condiciones existe la posibilidad de que sistema de osciladores caóticos espontáneamente se encuentren siguiendo un patrón bien definido u ordenado conocido como sincronización[48].

## **2.2. Modelo neuronal de Chialvo**

Entre los distintos modelos que existen para representar la dinámica neuronal, se tiene un mapa bidimensional presentado por Chialvo[16] que modela la dinámica de

una neurona aislada.

Un mapa esta definido como un sistema dinámico discreto de la forma:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t) , \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{x}_{t+1}$  representa el estado del sistema, en el instante de tiempo  $t$  y  $\mathbf{f}(x)$ , es la función que define la evolución del sistema. Hay que mencionar que una representación discreta del sistema generalmente, facilita el estudio de fenómenos mediante simulación numéricas sin perder generalidad.

Las neuronas de manera general tienen las siguientes propiedades:

- Cuando no existe una perturbación externa, el sistema tiene un punto de equilibrio, llamado estado de reposo, que es un atractor.
- El espacio de estados, se divide en dos regiones, una donde luego de una pequeña perturbación el sistema vuelve rápidamente al equilibrio y la otra, donde una perturbación mayor lleva al sistema a un potencial de acción antes de volver al punto de equilibrio.
- Durante el periodo posterior al momento en que se alcanza el potencial de acción el sistema puede que no responda de la misma manera a las perturbaciones externas.
- Bajo ciertas condiciones el sistema puede exhibir oscilaciones, y éstas en algunos casos pueden ser caóticas.

Un modelo que posea las propiedades mencionadas debe tener por lo mínimo dos variables de estado[60], el modelo de Chialvo que cumple con todas ellas viene dado por:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t, y_t) = y_t^2 e^{y_t - x_t} + k \\ y_{t+1} &= g(x_t, y_t) = ay_t - bx_t + c \end{aligned} , \quad (2.2)$$

donde la variable de estado  $x$  es llamada de activación y la variable  $y$  es llamada de recuperación. Este modelo tiene cuatro parámetros los cuales le permiten adoptar diversos comportamientos cualitativos: el parámetro  $k$  representa una entrada constante o también puede representar una perturbación aditiva que depende del

tiempo. El parámetro  $a$  es la constante de recuperación, el parámetro  $b$  corresponde a la dependencia de activación del proceso de recuperación, y el parámetro  $c$ ; es valor de offset. Un estudio analítico completo del comportamiento de este modelo va fuera del objetivo de esta investigación, sin embargo a continuación se presentan algunos de los comportamientos que puede adoptar el modelo propuesto por Chialvo. Para ver las trayectorias en el plano de fases del sistema se define la primera diferencia de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_{t+1} - x_t \\ \Delta y &= y_{t+1} - y_t\end{aligned}, \quad (2.3)$$

entonces la curva que representa los valores de  $y$ , que satisfacen  $\Delta x = 0$  es:

$$x^2 e^{y-x} + k = x, \quad (2.4)$$

despejando  $y$  de la ec. 2.4 tenemos:

$$y = \ln(x - k) - 2\ln(x) + x, \quad (2.5)$$

la curva que representa los valores de  $x$ , que satisfacen  $\Delta y = 0$  es:

$$ay - bx + c = y, \quad (2.6)$$

despejando  $x$  de la ec. 2.6 tenemos:

$$x = (ay + c - y)/b \quad (2.7)$$

En la figura 2.1a, se tienen las nullclines para el modelo de Chialvo que vienen dadas por las ecs. 2.4 y 2.4 para los parámetros,  $a = 0.89, b = 0.6, c = 0.28, k = 0.02$ , en la intersección de ambas curvas se encuentra el punto de equilibrio del sistema. Se dice que el sistema tiene una recuperación normal de la excitabilidad, si ante una perturbación en las condiciones iniciales del sistema se ubican a las variables de estado en el lado derecho del nullcline de  $x$  como se ve en la figura 2.1c, ocurre en el sistema un potencial de acción, antes de regresar a el punto de equilibrio este comportamiento es una respuesta típica en los sistema del tipo reposo-excitables. Por otro lado si la perturbación ubica a las variables de estado en el lado izquierdo

del nullcline de  $x$ , el sistema regresa rápidamente a su estado de reposo lo cual se observa en la figura 2.1b. Es evidente que una respuesta donde se observe un

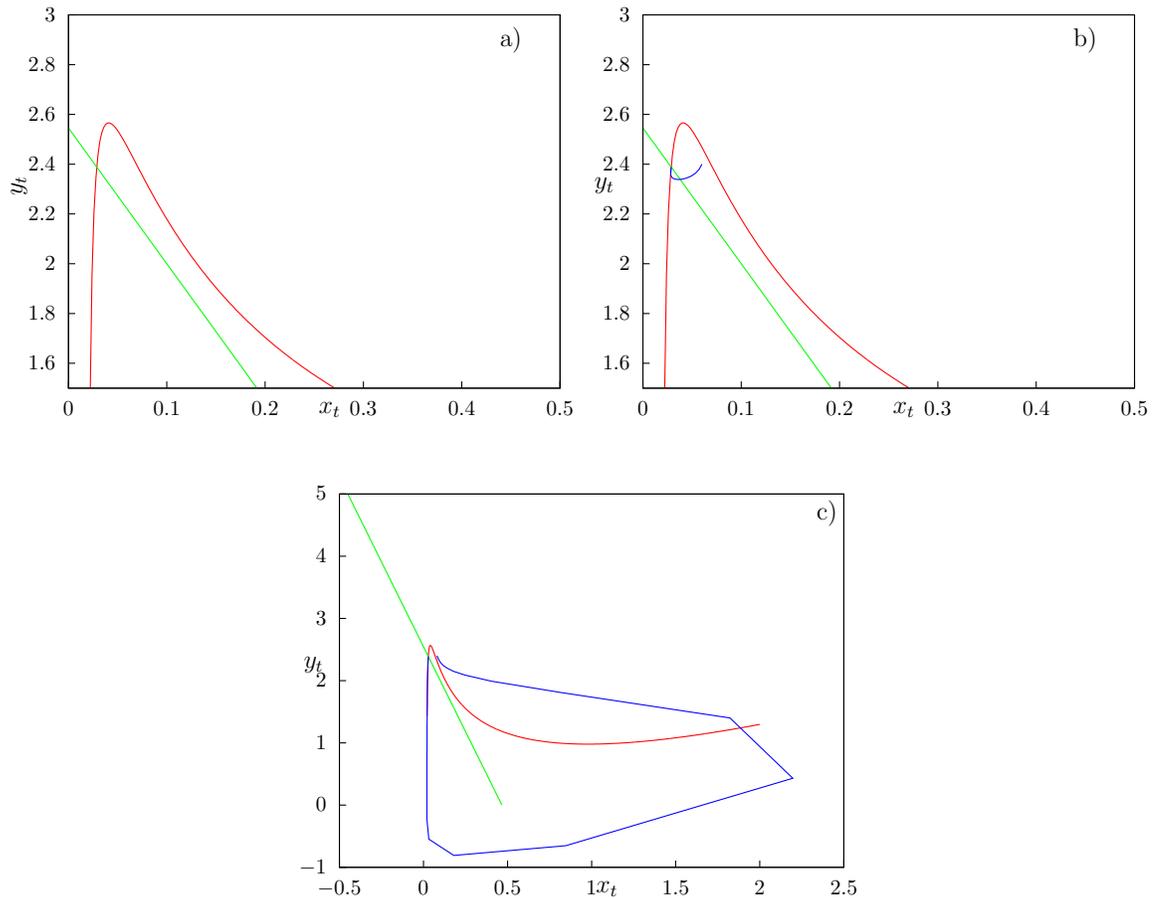


Figura 2.1: En (a) se tienen representados los nullclines del modelo de Chialvo para  $a = 0.89, b = 0.6, c = 0.28, k = 0.02$ , junto con una respuesta ante una perturbación a la izquierda del nullcline de  $x$  en (b) y a la derecha en (c)

potencial de acción o no, depende de la magnitud de la perturbación. En el caso de una recuperación normal, luego de la perturbación, la trayectoria de las variables de estado se acerca de manera monótona al punto de equilibrio. Sin embargo se debe hacer la distinción en el caso de una recuperación supernormal de la excitabilidad, la cual corresponde a una aproximación oscilatoria hasta el punto de equilibrio. En el modelo de Chialvo este comportamiento se puede observar para  $k > 0.02$ . Por

ejemplo la figura 2.2 muestra la evolución del sistema para  $k = 0.29$  que corresponde a que el punto de equilibrio es ahora un foco, como se ve en la figura 2.2b en donde las trayectorias del sistema se acercan al punto de equilibrio en espiral, en la figura 2.2a se tiene la evolución temporal de la variable de estado  $x$  ante la aplicación de una perturbación de magnitud  $\varepsilon = 0,015$ , en las iteraciones  $t = 2, 40, 60$  y  $80$ . Aunque todas debieran tener una respuesta sin potencial de acción, se ve que para el caso de la iteración en  $t = 60$  ocurre un potencial de acción. Esto se debe a que esta perturbación fue aplicada cuando ocurre una pequeña oscilación en la variable estado  $x$ .

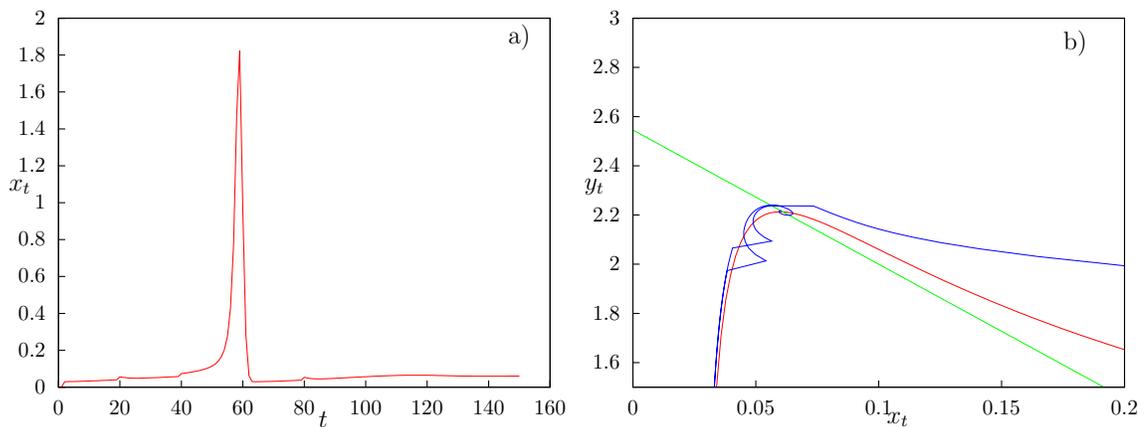


Figura 2.2: En (a), se puede observar que para la iteración  $t = 60$ , ocurre el potencial de acción. Y en (b) se ve que esto ocurre, debido a que la iteración  $t = 60$  se movió para posicionarse por encima del umbral, aunque se le haya aplicado una perturbación de la misma intensidad.

Para un incremento aun mayor del parámetro  $k$ , por ejemplo  $k = 0.03$ , coexisten dos comportamientos en el espacio de fases, un foco estable y un ciclo límite. Que las trayectorias converjan a alguno de los dos atractores depende de las condiciones iniciales. En la figura 2.3, se puede ver que debido a que estos dos comportamientos coexisten, es posible un cambio entre estas dos soluciones, se aplica una perturbación sacando a las variables de estado del dominio de atracción del ciclo límite y llevándolas al dominio de atracción del foco, fenómeno que es llamado “Aniquiliación”, y se ha visto en varios experimentos: En los axones de un calamar gigante, los modelos de lo nervios y células cardiacas [8, 40]. Por ultimo cambiando el parámetro de de-

pendencia de activación de la variable de recuperación a  $b = 0.18$ , las oscilaciones vistas en la figura 2.3 se convierten en ráfagas de disparos aperiódicas, como se ve en la figura 2.4. Este comportamiento ha sido estudiado en las redes neuronales, y se ha relacionado con el cambio de entre distintas actividades cognitivas[50].

## 2.3. Sincronización

La sincronización es un fenómeno colectivo que se presenta cuando un grupo de osciladores que interactúan de alguna manera entre ellos, presentan un ajuste de sus ritmos de oscilación[49].

Un oscilador un sistema que posee una fuente de energía interna, la cual se transforma en un movimiento oscilatorio. Mientras éste permanezca aislado, mantiene un ritmo constante hasta que su fuente de energía interna expira, en la izquierda de la figura 2.5 se observa la evolución temporal de un comportamiento de este tipo y a la derecha un movimiento oscilatorio en el cual la fuente de energía interna del sistema nunca expira. La forma de las oscilaciones depende únicamente de los parámetros intrínsecos del sistema y no de la manera en que éste fue puesto en marcha. Por otra parte, las oscilaciones al ser sometidas a alguna perturbación con el transcurso del tiempo regresan a su forma original.

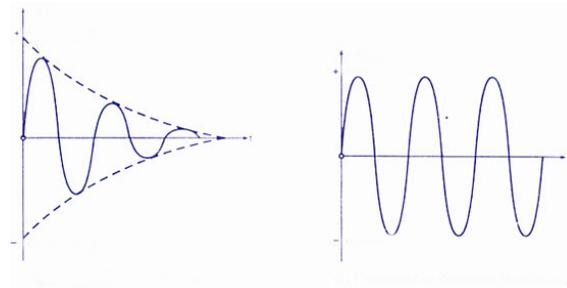


Figura 2.5: A la izquierda un ejemplo de oscilaciones en las cuales su fuente de energía interna expira y a la derecha con una fuente de energía interna infinita

Los ritmos que poseen los osciladores pueden tener distintas formas, se pueden representar desde una simple onda sinusoidal, hasta una secuencia de disparos continuos. La cuantificación de éste depende de su forma, por ejemplo, en el caso de la onda sinusoidal se puede medir a través de un período o una frecuencia.

Se dice que hay un ajuste de ritmos entre un grupo de osciladores ocurre cuando estos presentan la misma frecuencia de oscilación. Sí esto ocurre o no, depende de dos factores: el primero es la fuerza del acoplamiento; la cual representa qué tan fuertes son las interacciones de los elementos, es decir, determinar qué tanta influencia puede desarrollar un elemento sobre otro; el segundo factor tiene que ver con la capacidad de medir qué tan diferentes son las frecuencias de oscilación que presentan al estar aislados.

## 2.4. Redes

Una red es un conjunto de objetos conectados. Normalmente se refiere a los objetos como nodos o vértices, y se representan generalmente como puntos. Y a las conexiones entre los nodos usualmente se le dicen arcos, estos pueden ser, simples y estar representados mediante una línea; pueden ser dirigidos y estar representados mediante una flecha que indica la dirección de la conexión y para ambos caso estos pueden tener una ponderación que representa la fuerza de la relación que tiene los elementos de la red. Las redes se ven representadas de manera matemática mediante el uso de grafos. Las redes pueden representar distintos tipos de sistemas, por ejemplo, la red de Internet, en donde las computadoras serían los nodos y los arcos serían la conexión física o inalámbrica entre ellos.

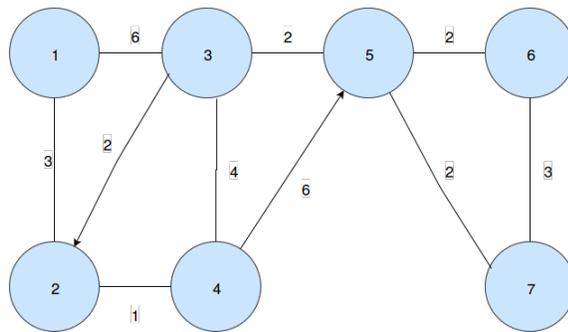


Figura 2.6: Grafo que representa una red de 7 nodos con sus respectivos arcos

Una manera de representar los arcos que conectan los nodos de una red, es por medio de una matriz de adyacencia  $W$  que es cuadrada y donde cada uno de sus campos  $W_{ij}$  representa la fuerza de la interacción del nodo  $i$  sobre el nodo  $j$ . Para

la red representada por la figura 2.6, la matriz de adyacencia es:

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.8)$$

## 2.5. Redes de mapas acoplados

Las redes neuronales son sistemas complejos, es decir, sistemas compuestos de múltiples elementos no lineales que interactúan entre si. Para estudiar estos sistemas dinámicos no lineales, se puede construir un modelo rico y complejo mediante el acoplamiento de un gran numero de sistemas dinámicos de orden bajo. Además, estos pueden simplificarse aun mas considerándolos discretos en tiempo y espacio. Las Redes de mapas acoplados ( RMA ) o Coupled Map Lattices ( CML ) están constituidas por un conjunto de elementos, los cuales poseen un espectro continuo que evoluciona según un mapa, y viene escrita de manera general de la siguiente forma:

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i) + g(V_t^i), \quad (2.9)$$

donde,  $x_t^i$  es la variable de estado del nodo o celda  $i$  en tiempo discreto  $t$ ,  $i = 1, \dots, N$  es el índice que identifica cada uno de los  $N$  elementos de la red,  $f(x_t^i)$ ; es una función que representa la dinámica local del nodo y el término  $g(V_t^i)$ , es una función que determina la influencia o la interacción que tiene sobre el elemento  $i$ -ésimo el conjunto de sus vecinos  $V_t^i$ .

Uno de los criterios usados para determinar si los elementos de la red de mapas acoplados se encuentran sincronizados consiste en medir si los elementos de la red exhiben órbitas iguales mientras el tiempo transcurre, esto es:

$$|x_t^i - x_t^j| < \varepsilon \forall i, j, t \rightarrow \infty, \quad (2.10)$$

donde  $\varepsilon$  es un valor positivo arbitrariamente pequeño, esta definición es válida para órbitas caóticas y periódicas.

## 2.6. Plasticidad del sistema nervioso

El término plasticidad corresponde a la capacidad que tiene algún objeto de cambiar de forma y conservarla durante un período de tiempo determinado: en cuanto al campo de estudio de este trabajo, se habla de la Neuroplasticidad; que es la propiedad que emerge de la naturaleza y funcionamiento de las neuronas cuando éstas establecen una comunicación o sinápsis. Esta dinámica deja una huella al tiempo que modifica la eficacia de la transferencia de la información entre las neuronas, es decir, sus patrones de conexión sináptico cambian modificando las rutas de interconexión. Este fenómeno está relacionado con la memoria y los procesos de aprendizaje.

Una teoría que explora como ocurre la neuroplasticidad es la teoría hebbiana que establece que el valor de una conexión sináptica se incrementa si las neuronas de ambos lados de dicha sinápsis se activan repetidas veces de forma simultánea, de forma tal que en un futuro no dependerán únicamente de su propia estimulación, sino también, de la activación de las neuronas vecinas con la sinápsis incrementada. De esta manera forman una red Hebbiana, para que la plasticidad neuronal sea posible también debe existir el fenómeno inverso, es decir, que si una conexión en una red Hebbiana no se usa, debe ir perdiendo sus componentes hasta desaparecer, es decir que las neuronas se vayan desconectando unas de otras. Es importante destacar, que esta teoría sólo corresponde a una representación de una simplificación del sistema nervioso, por tanto no debe tomarse literalmente. Sin embargo este proceso de plasticidad es el que hace al sistema nervioso tan excepcional proporcionándole, su maleabilidad y capacidad de cambio. Esta teoría es comúnmente usada para explicar algunos tipos de aprendizaje asociativos, en donde la activación simultánea de las neuronas conduce a un pronunciado aumento de la fuerza sináptica. Este aprendizaje se conoce como aprendizaje de Hebb[26].

En los nodos de la red Hebbiana están las neuronas que son células del sistema nervioso. El cerebro humano contiene más de 50 billones de neuronas. Del cuerpo de cada neurona se desprenden el axón y las dendritas que son elementos fundamentales

en la transmisión nerviosa. El axón es una fibra nerviosa única que surge del cuerpo neuronal y transmite información desde el cuerpo de la neurona hasta su extremo donde se producen las neurotransmisiones que provocan las sinápsis que van a las dendritas de las neuronas vecinas.

La comunicación de ordenes y mensajes entre las neuronas y las estructuras neuronales como también los órganos del cuerpo, se le denomina neurotransmisión, y sólo puede llevarse a cabo a través de los neurotransmisores. Los neurotransmisores son sustancias neuro químicas, que actúan como mensajeros, siendo liberada por las terminales del axón neuronal en el espacio sináptico. Ellos se unen a los puntos de recepción de las neuronas receptoras acomodándose a las dendritas del receptor, lo cual permite que los iones penetren en la neurona receptora excitándola o inhibiéndola.

La sinapsis es el fenómeno de interacción o comunicación entre dos neuronas que ocurre en una zona determinada (Espacio sináptico). Su actividad explica todas las acciones del cerebro, desde las más sencillas; como ordenarle a los músculos su contracción, hasta las tareas más complejas, como las que originan y controlan nuestras emociones.

En el siguiente capítulo se muestra como están representados matemáticamente todos los elementos anteriormente expuestos, como también su respectiva estructura e implementación de los modelos que analiza este trabajo de grado.

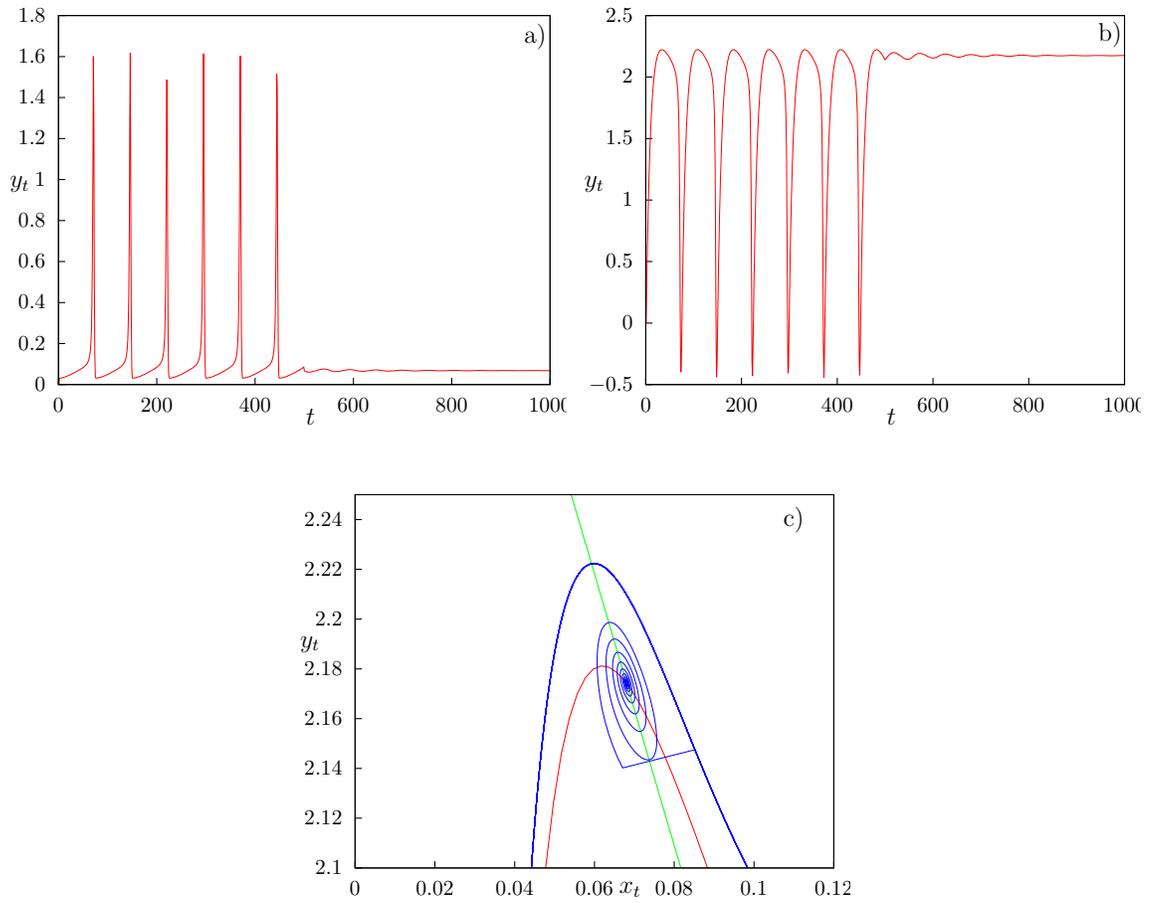


Figura 2.3: En las figuras (a) y (b), se tiene la evolución temporal de las variables de estado  $x$  y  $y$  respectivamente, y en (c) el espacio de estados juntos con los nullclines, con la aplicación de una perturbación  $\varepsilon = 0.02$  en la iteración  $t = 580$ , se puede ver la aniquilación del comportamiento oscilatorio

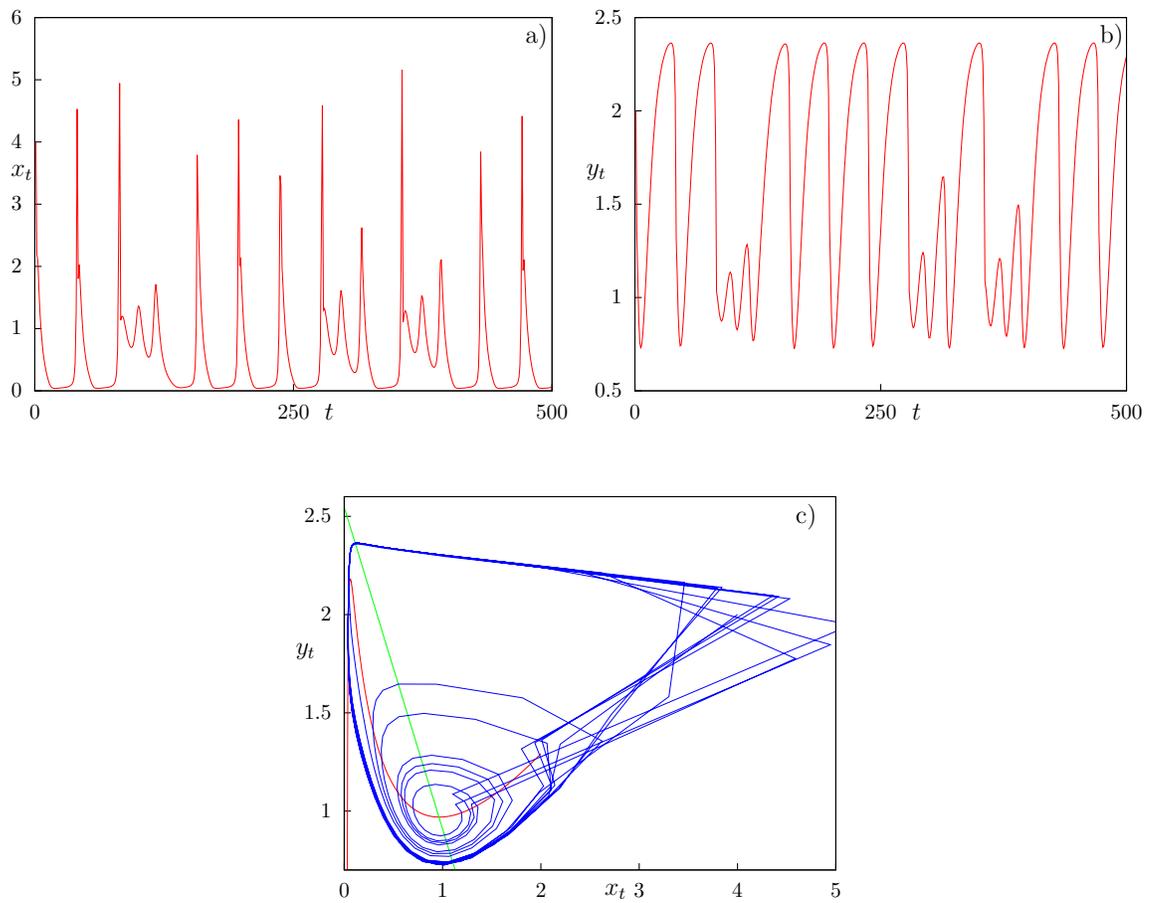


Figura 2.4: En las figuras (a) y (b), se tiene la evolución temporal de las variables de estado  $x$  y  $y$  respectivamente, y en (c) el espacio de estados juntos con las nullclines, se observa la presencia de un atractor extraño alrededor de la intersección de las nullclines del sistema

## Capítulo 3

# Diseño e implementación del modelo

Para el estudio numérico de un sistema complejo, y en particular de una red neuronal, es esencial hacer una simplificación de la misma construyendo un modelo compuesto por elementos con dinámica local capaces de interactuar entre sí. Para hacer esto es importante tener un modelo matemático simple con una dinámica que exhiba las propiedades más importantes de cada elemento del sistema, en nuestro caso la neurona; un número pequeño de parámetros que tengan un sentido físico; y que el fenómeno que se quiere estudiar emerja en dicho modelo. Esta manera de proceder corresponde al modelado constructivista propuesto por Ito y Kaneko[37].

Este trabajo de grado continua la investigación de Kaneko[36], donde se propone una manera eficiente de estudiar estos sistemas dinámicos mediante redes de mapas acoplados (RMA); según Kaneko los pasos para modelar un sistema dinámico usando RMA son dos. En primer lugar hay que describir las unidades como dinámicas simples y paralelas, es decir, el estado de cada unidad está determinado por un mapa, en donde intervienen todas las unidades con las que interactúa. El segundo paso consiste en resolver la dinámica de la red, iterando cada uno de los mapas que la conforman.

En la red neuronal del cerebro se encuentra presente la sincronización, fenómeno muy importante en diversas funciones, tales como el aprendizaje[57] y los procesos verbales [7] y cognitivos[67]. También la sincronización está relacionada con patologías o enfermedades de origen neurológico como lo es la esquizofrenia paranoide[3,

24] y ataques convulsivos propios de la epilepsia[65].

Con el objetivo de estudiar el fenómeno de sincronización en redes neuronales se crea un modelo mediante una red de mapas acoplados con dinámica caótica excitable a la cual se le aplican perturbaciones externas con la finalidad de mantenerlas desincronizadas.

Nuestro modelo base, sin perturbaciones, lo conforma la red de mapas acoplados con enlaces ponderados, compuesta por  $N$  osciladores caóticos excitables que representan a las neuronas y que siguen la dinámica propuesta por Chialvo y presentada en la sección 2.2, todos ellos acoplados mediante una matriz de adyacencia  $W$  cuyos elementos representan las sinápsis.

La dinámica de los estados viene dada por

$$\begin{aligned} x_{t+1}^i &= (1 - \epsilon)[(y_t^i)^2 e^{y_t^i - x_t^i} + k] + \epsilon \sum_j w_t^{ij} [(y_t^j)^2 e^{y_t^j - x_t^j} + k] \\ y_{t+1}^i &= ay_t^i - bx_t^i + c \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde  $x_t^i$  y  $y_t^i$  representan las variables de estado de la neurona  $i$  en el instante  $t$ , los parámetros de la dinámica local de las neuronas se fijan en  $a = 0.89$ ,  $b = 0.18$ ,  $c = 0.28$  y  $k = 0.03$  para que ésta cumpla con las condiciones deseadas de ser caótica y excitable;  $\epsilon \in (0, 1)$  es un parámetro que controla la intensidad de la fuerza de acoplamiento; y  $w_t^{ij}$  es el elemento  $ij$  de la matriz de adyacencia  $W$  que representa el peso que va de la neurona  $j$  a la neurona  $i$  en el instante  $t$ , cuya evolución a su vez viene dada por

$$w_{t+1}^{ij} = \frac{[1 + \delta g(x_t^i, x_t^j)] w_t^{ij}}{\sum_j [1 + \delta g(x_t^i, x_t^j)] w_t^{ij}} \quad (3.2)$$

donde  $\delta \in (0, 1)$  representa el grado de plasticidad de la red, y el denominador de la expresión actúa como normalizador de los pesos para que así estos se mantengan entre 0 y 1. Este mecanismo se conoce como plasticidad homeoestática y se refiere al proceso de mantener la estabilidad en las funciones neuronales [4]. La función  $g(x^i, x^j)$  representa una regla de aprendizaje para la red neuronal del tipo Hebbiano

la cual viene dada por

$$g(x^i, x^j) = \begin{cases} \cos\left(\frac{|x^j - x^i|}{\Omega}\right) & \text{si } |x^j - x^i| \leq 4 \text{ para } \Omega = 1.25 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases} . \quad (3.3)$$

La figura 3.1a muestra el comportamiento de la función  $g(x^i, x^j)$  para  $\Omega = 1.25$  que abarca la diferencia máxima de la variable de activación del modelo de Chialvo en régimen caótico como se ve en la figura 3.1b. Cuando la diferencia  $|x^j - x^i| \leq 2$  el peso del enlace de la neurona  $j$  a la neurona  $i$  aumenta y cuando  $|x^j - x^i| > 2$  este disminuye.

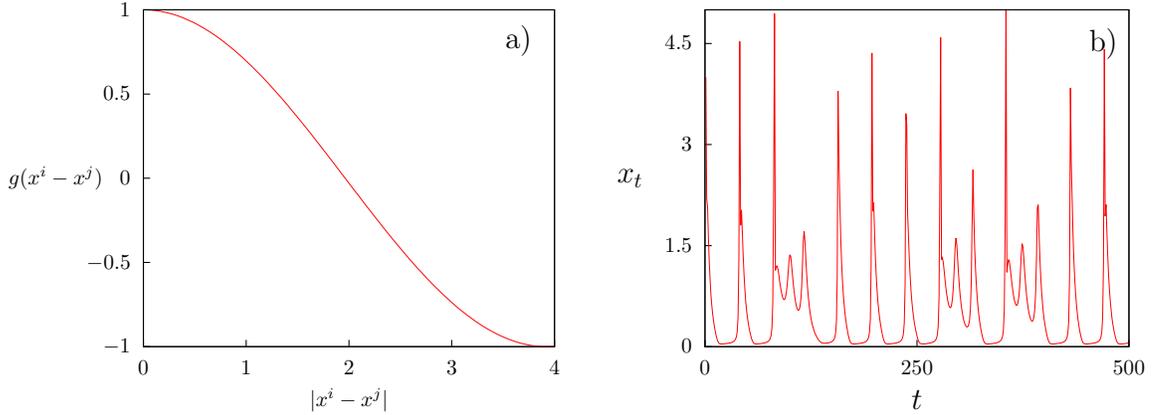


Figura 3.1: (a) Función que representa el aprendizaje hebbiano; donde  $\Omega$  es el parámetro que permite la compresión o expansión de la función, en este caso entre 0 y 4.(b) Evolución de la variable de activación del modelo de Chialvo en régimen caótico.

### 3.1. Sincronización y desincronización

Para las simulaciones se estableció una red de  $N = 1000$  osciladores caóticos con condiciones iniciales aleatorias uniformemente distribuidas para las variables de estado  $x^i \in (0.1, 5.0)$  y  $y^i \in (0.8, 2.3)$  que como se observo en la figura 2.4 abarca el rango de valores posible de estos, con un valor inicial de  $w^{ij} = \frac{1}{N-1}$  si  $i \neq j$  y  $w^{ii} = 0$  para todo  $i$

La figura 3.2 muestra la evolución temporal de la variable de activación  $x_t^i$  de 10 elementos de la red. Estableciendo un valor para el grado de plasticidad  $\delta = 0.5$ , nótese que para los dos valores de la intensidad de acoplamiento de los elementos  $\epsilon$  se observa un estado sincronizado cuando  $\epsilon = 0.25$  figura 3.2a, mientras que cuando  $\epsilon = 0.15$  el sistema no está sincronizado 3.2b.

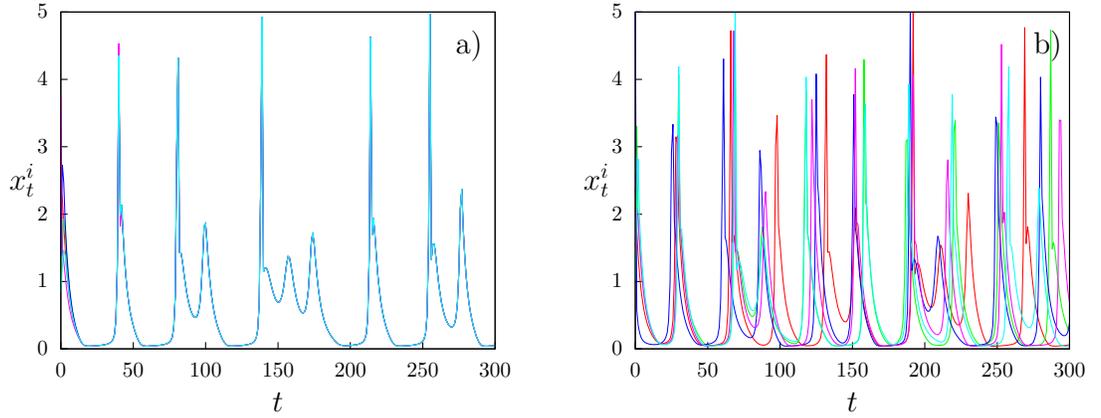


Figura 3.2: Evolución temporal de la variable de activación  $x_t^i$  para 10 elementos de la red en con  $\delta = 0.5$  y dos valores para la intensidad de acoplamiento  $\epsilon$ . a)  $\epsilon = 0.25$  b)  $\epsilon = 0.15$

De esta manera queda evidenciado que el estado de sincronización de los elementos de la red depende de la intensidad de acoplamiento entre los elementos  $\epsilon$ . Con el fin de cuantificar al estado sincronizado en la red de mapas acoplados, se calcula la varianza instantánea de los estados de los elementos del sistema que viene dada por

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N ([x_t(i) - \langle x_t \rangle]^2 + [y_t(i) - \langle y_t \rangle]^2), \quad (3.4)$$

donde  $\langle x_t \rangle$  y  $\langle y_t \rangle$  son los promedios instantáneos de las variables de estado de los  $N$  elementos de la red en la iteración  $t$ .

En la figura 3.3 se muestra la evolución temporal de la varianza instantánea en escala logarítmica de los elementos de la red para dos valores del parámetro  $\epsilon$ . A la izquierda, figura 3.3a, con  $\epsilon = 0.25$  se puede observar que la varianza instantánea alcanza valores en el orden de  $10^{-10}$  para  $t > 50$  por lo tanto se dice que la red

está en un estado de sincronización. En cambio para  $\epsilon = 0.15$  se tiene que la red está desincronizada como lo muestra la figura 3.3b donde se nota que el valor de la varianza instantánea se mantiene oscilando para valores entre  $10^{-1.5}$  y  $10^{1.5}$  en  $t > 150$ . Debido a este último comportamiento oscilatorio calculamos la varianza promediada en el tiempo.

$$\sigma^2 = \frac{1}{T_f - T_o} \sum_{t=T_o}^{T_f} \sigma_t^2, \quad (3.5)$$

donde  $T_o$  define el inicio del intervalo de tiempo en el cual sera promediada  $\sigma_t^2$  y  $T_f$  el instante final. De esta manera se puede cuantificar que la red este en un estado de sincronización,  $\sigma^2 \simeq 0$  o de desincronizacion en caso contrario. Además

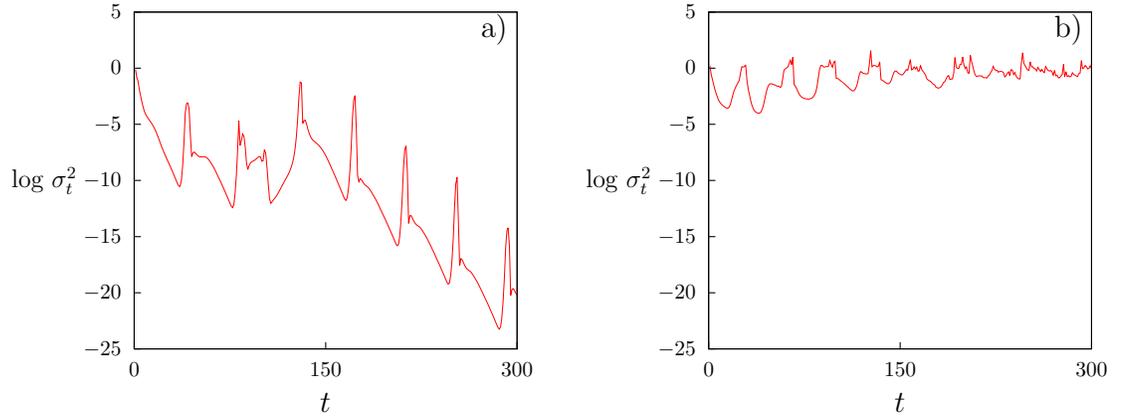


Figura 3.3: Logaritmo de la varianza instantánea de la red para  $\delta = 0.5$  y dos valores distintos de la intensidad de acoplamiento. a)  $\epsilon = 0.25$  b)  $\epsilon = 0.15$ .

para saber si el estado sincronizado es absorbente se pide que la red haya alcanzado alguna estructura estable en sus conexiones, esto quiere decir que su matriz de pesos no presente cambios posteriores y asegurar así que la red se encuentra en estado asintótico. Para esto se calcula la actividad instantánea de la matriz de pesos, que viene dada por

$$A_t = \frac{1}{(N-1)^2} \sum_{i \neq j} |w_t^{ij} - w_{t-1}^{ij}|, \quad (3.6)$$

que busca representar el cambio promedio de la conexiones en un instante de tiempo. La figura 3.4 muestra la actividad instantánea  $A_t$  para una red con  $\delta = 0.5$  y dos

valores de  $\epsilon$ . A la izquierda, en la figura 3.4a con  $\epsilon = 0.25$ , la red alcanza un estado de sincronización el valor de la actividad en la matriz de adyacencia de la red alcanza un valor de  $A < 10^{-20}$ , mientras que con  $\epsilon = 0.15$ , figura 3.4b, cuando la red se encuentra desincronizada la actividad  $A$  tiene un valor en el orden de  $10^{-12}$ . En ambos casos los valores obtenidos de la actividad son relativamente pequeños por lo que se considera que la red a alcanzado una estructura estable, sin embargo, nótese que la actividad tiene un mayor valor cuando la red se encuentra en estado desincronizado. De igual manera que la varianza de los estados del sistema la actividad instantánea también es promediada en el tiempo entre un valor  $T_o$  inicial y un valor final  $T_f$ .

$$A = \frac{1}{T_f - T_o} \sum_{i \neq j} A_t, \quad (3.7)$$

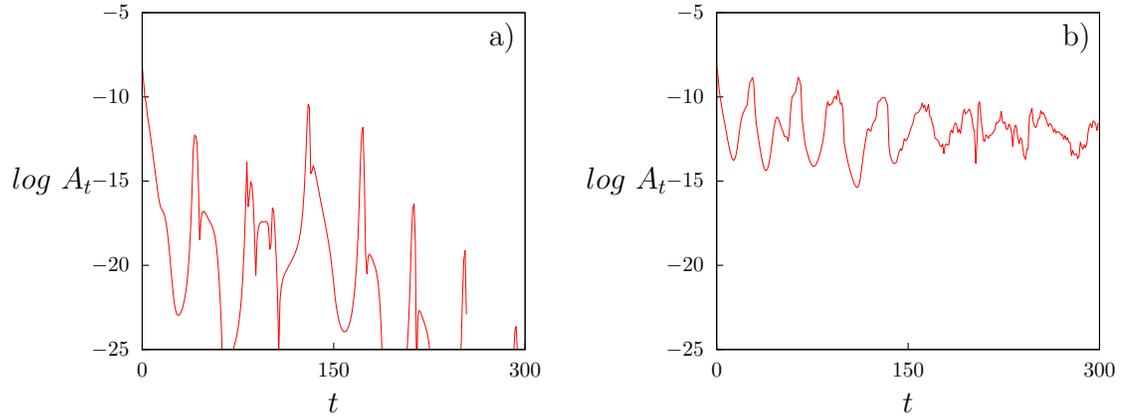


Figura 3.4: Evolución temporal del logaritmo de la actividad instantánea en la matriz de adyacencia de la red  $A_t$  con  $\delta = 0.5$  y para dos valores de la intensidad de acoplamiento  $\epsilon$ . a)  $\epsilon = 0.25$  b)  $\epsilon = 0.15$ ,

La figura 3.5 muestra la evolución de la variable  $w_t^{ij}$  de dos pares de elementos de la red. A la izquierda, figura 3.5a con  $\epsilon = 0.25$ , que corresponde a un estado de sincronización, la dinámica en la evolución del peso de enlace entre los elementos crece hasta llegar a un valor de saturación estable. En cambio, en la figura 3.5b, con  $\epsilon = 0.15$  que corresponde a un estado de desincronización, la dinámica de la evolución de los pesos presenta una mayor actividad debido a que la diferencia entre

el valor de la variable de activación de los nodos se mantiene, hasta llegar a un punto donde la conexión entre los nodos está totalmente debilitada.

Para determinar cómo depende el comportamiento del sistema de la intensidad de acoplamiento  $\epsilon$  y el grado de plasticidad  $\delta$  la figura 3.6 muestra el diagrama de fase en el espacio de parámetros  $(\delta, \epsilon)$  usando como parámetros de orden  $\sigma^2$ , figura 3.6a, y A figura 3.6b. Se aprecia en ambos casos que para valores pequeños del acoplamiento  $\epsilon$  el sistema no logra sincronizarse, sin importar que tan grande sea el valor de la plasticidad  $\delta$ . También podemos decir que el valor crítico de la intensidad del acoplamiento para la cual se da la transición sincronización-desincronización  $\epsilon_c$  depende del valor de la plasticidad de la red  $\delta$ , aumentado cuando este último crece.

La barra de colores de la figura 3.6a representa el valor de la varianza de los elementos de la red, del negro, pasando por el azul hasta el amarillo para la desincronización y el blanco para la sincronización. Se observa que existe una clara separación entre ambas regiones, y que el estado de sincronización de la red depende en menor grado del valor del parámetro  $\delta$ , que del parámetro  $\epsilon$ , determinando así que el estado de sincronización depende en mayor medida de la fuerza de de la interacción de sus elementos que de la plasticidad que está presente. Nótese además que en la figura 3.6b que corresponde con la actividad en la matriz de adyacencia de la red la región de mayor actividad en la matriz de adyacencia corresponde con la región de desincronización de la red aunque con valores menores que  $10^{-4}$ , donde se considera la existencia de una estructura estable en las conexiones de la red.

## 3.2. Aplicación de Perturbaciones Externas

Conocido el comportamiento del sistema sin perturbaciones se propone introducir un primer tipo de perturbación mediante la siguiente modificación a nuestro modelo base

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)[(y_t^i)^2 e^{y_t^i - x_t^i} + k] + \epsilon \sum_j w_t^{ij} [(y_t^j)^2 e^{y_t^j - x_t^j} + k] + B, \quad (3.8)$$

$$y_{t+1} = ay_t - bx_t + c$$

donde  $B$  es la magnitud de la perturbación que se aplica a cada elemento  $x_t^i$  de la red en todo instante de tiempo  $t$ . Se determinó que la perturbación sería aplicada cuando

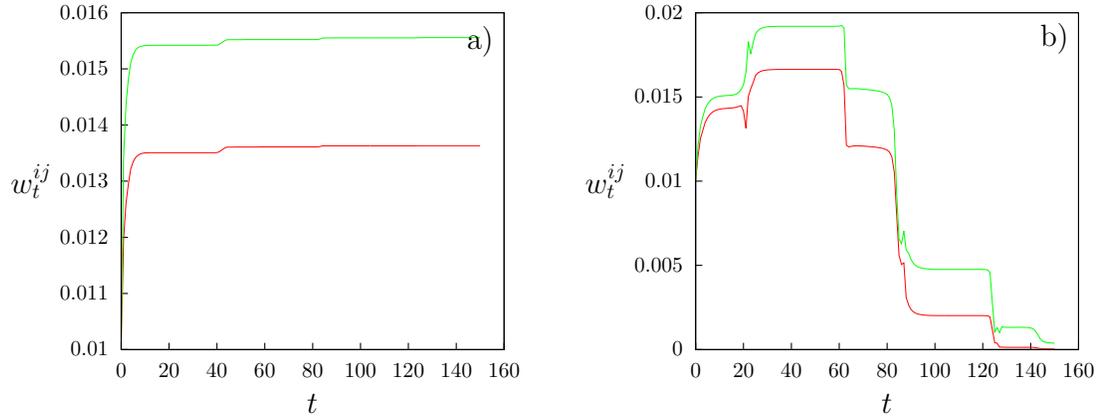


Figura 3.5: Evolución del valor instantáneo de dos pesos para  $\delta = 0.5$  y dos valores de  $\epsilon$ . a)  $\epsilon = 0.25$ . b)  $\epsilon = 0.15$ .

la red alcanzara un estado estable de sincronización. Se requiere que la red tenga un estado sincronizado antes de aplicar la perturbación, en la figura 3.7 muestra la evolución de la varianza instantánea de la red de arriba hacia abajo para  $\delta = 0.50$  con  $\epsilon = 0.30$  y  $\epsilon = 0.35$  y para  $\delta = 0.60$  con  $\epsilon = 0.40$  y  $\epsilon = 0.45$ . Se observa que para  $t > 20$ ,  $\sigma < 10^{-6}$  determinando así que la red alcanza un estado sincronizado en menos de 20 iteraciones.

En la figura 3.8, se observa la evolución en el tiempo de cuatro elementos de la red al aplicar una perturbación de intensidad  $B = 0.20$  y  $B = -0.30$  en el instante de tiempo  $t_o = 150$  asegurando así que la red ya se encuentre en un estado estable de sincronización.

La figura 3.8a muestra que la red para  $\delta = 0.50$  y  $\epsilon = 0.30$  alcanza un estado de sincronización caótica cerca de  $t = 40$ . Al aplicar la perturbación de magnitud  $B = 0.20$  en  $t_o = 150$  se observa que el comportamiento de los elementos de la red pasa de ser caótico a ser estable, sin que pierda su estado sincronizado.

En cambio para el caso de  $B = -0.30$ , la figura 3.8b presenta un sistema que pasa de un estado aparentemente caótico sincronizado antes de aplicar la perturbación a un estado caótico desincronizado luego de aplicarla.

Con el fin de estudiar el efecto que tiene la perturbación sobre el sistema cuando este se encuentra sincronizado, establecemos los parámetros  $\delta = 0.50$  y  $\epsilon = 0.30$  para

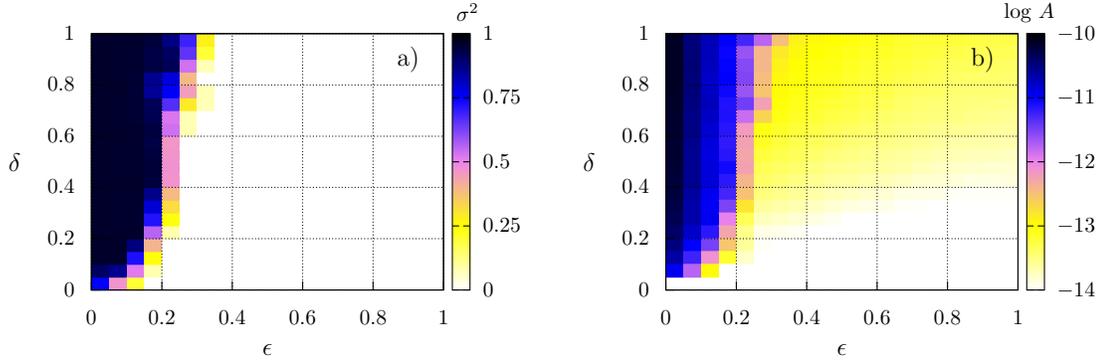


Figura 3.6: Diagramas de fases en el espacio de parámetros  $(\delta, \epsilon)$  en negro se muestra la región de desincronización y en blanco la región sincronizada. a) Parámetro de orden  $\sigma^2$ . b) Parámetro de orden  $A$

que el modelo se encuentre en la fase sincronizada ver figura 3.6, una perturbación  $B \in (-0.30, 0.30)$  luego de que la red alcance un estado estable de sincronización, es decir  $t > 150$ , dejándolo evolucionar por  $t = 1000$  iteraciones. La figura 3.9 muestra el logaritmo de la varianza  $\sigma^2$  en función de la magnitud de la perturbación. Nótese que solamente para  $B > -0.20$ , decrece de manera significativa el valor de  $\sigma^2$ , lo que indica que afecta la sincronización de la red.

Aunque esta estrategia muestra ser efectiva para lograr que la red pase de estar sincronizada a no estarlo, la magnitud de la perturbación requerida es relativamente grande afectando a todos los elementos de la red, eso significa que en caso de redes neuronales biológicas se requeriría de la aplicación de un choque eléctrico fuerte en todas las neuronas.

En vista de lo anterior planteamos una segunda estrategia que busca de reducir el número de veces que se aplica perturbación a todos los elementos de la red pero con cierta probabilidad, para ello definimos la función

$$\Theta_t(p_1) = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p_1 \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p_1 \end{cases}, \quad (3.9)$$

donde  $p_1$  es la probabilidad con la cual la perturbación se aplica en el instante de

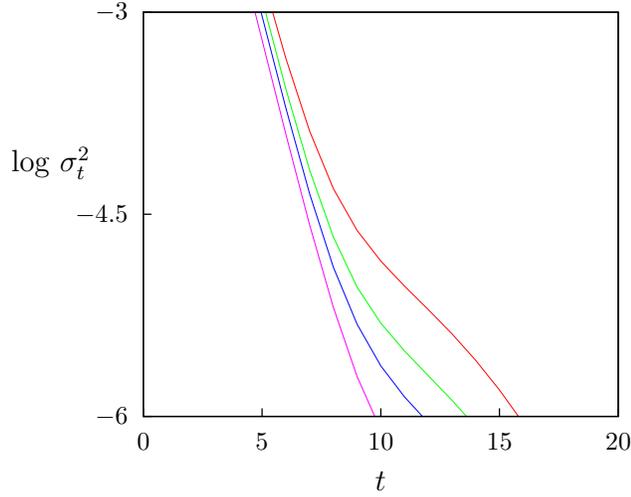


Figura 3.7: Logaritmo de la varianza instantánea de la red para  $\delta = 0.50$  con  $\epsilon = 0.30$  y  $\epsilon = 0.35$  y para  $\delta = 0.60$  con  $\epsilon = 0.40$  y  $\epsilon = 0.45$

tiempo  $t$  de acuerdo con la expresión

$$x_{t+1}^i = (1 - \epsilon)[(y_t^i)^2 e^{y_t^i - x_t^i} + k] + \epsilon \sum_j w_{ij} [(y_t^j)^2 e^{y_t^j - x_t^j} + k] + \Theta_t(p_1)B, \quad (3.10)$$

$$y_{t+1} = ay_t - bx_t + c$$

donde  $B$  es la magnitud de la perturbación que se aplica con probabilidad  $p_1$  a los elementos del sistema en cada iteración. En la figura 3.10 se presenta la evolución de cuatro elementos de la red  $\delta = 0.50$  y  $\epsilon = 0.30$  al aplicar una perturbación  $B = -0.15$  y  $B = 0.10$ , con una probabilidad  $p_1 = 0.85$  donde se observa, a la izquierda, con una perturbación positiva el rango de valores de la variable de activación se reduce pero esta mantiene sincronizada. En cambio a la derecha se puede apreciar que con la aplicación de una perturbación negativa el estado de sincronización de la variable de activación de los elementos de la red se ve afectado.

La figura 3.11 muestra el espacio de parámetros  $(B, p_1)$  donde se aprecia que con la aplicación de una perturbación sobre todos los elementos de magnitud en torno a  $B = -0.15$  y con una probabilidad  $p_1 = 0.85$  se logra desincronizar la red. Obteniendo así una mejora con respecto a la estrategia anterior, en la que se aplicaba una perturbación siempre, ya que se logra reducir la magnitud de la perturbación

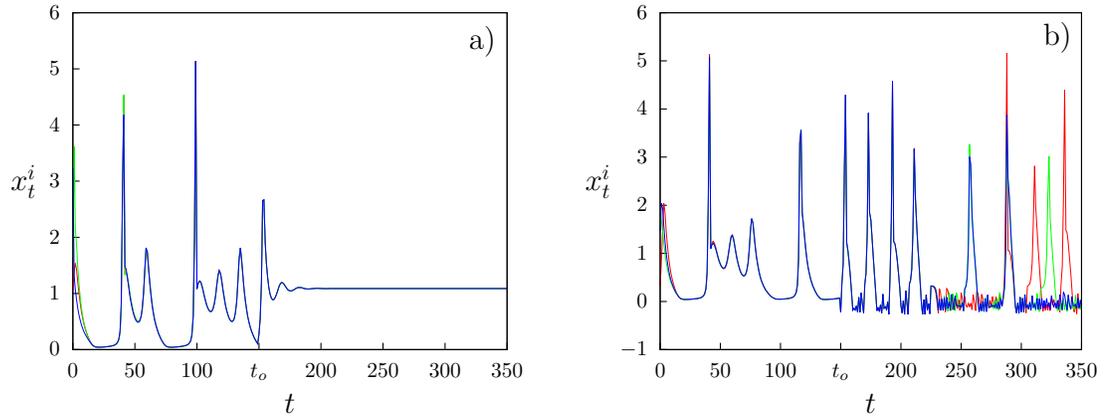


Figura 3.8: Evolución temporal de la variable de activación  $x_t^i$  para 10 elementos de la red en con  $\delta = 0.50$  y  $\epsilon = 0.25$  al aplicar una perturbación de magnitud constante  $B$  en  $t = 150$ . a)  $B = 0.20$  . b)  $B = -0.30$ .

y la cantidad de veces que esta se aplica. En otras palabras, con esta estrategia se logra reducir tanto la frecuencia y la magnitud de los choques eléctricos a la que se somete la red de neuronas.

Planteamos una tercera estrategia con la que se busca de reducir la cantidad de elementos que se perturban en cada iteración para esto se define la función

$$\Theta_i(p_2) = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p_2 \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p_2 \end{cases}, \quad (3.11)$$

donde  $p_2$  es la probabilidad de que la perturbación sea aplicada al elemento  $i$  en la iteración actual. Quedando el modelo expresado de la forma

$$\begin{aligned} x_{t+1}^i &= (1 - \epsilon)[(y_t^i)^2 e^{y_t^i - x_t^i} + k] + \epsilon \sum_j w_{tj}^i [(y_t^j)^2 e^{y_t^j - x_t^j} + k] + \Theta_i(p_2)B \\ y_{t+1} &= ay_t - bx_t + c \end{aligned}, \quad (3.12)$$

donde  $B$  representa la magnitud de la perturbación que se aplica al elemento  $i$  con probabilidad  $p_2$ .

La figura 3.12 muestra la evolución de cuatro elementos del sistema para tres pares de valores de los parametros  $B$  y  $p_2$ , así como también el comportamiento de  $\sigma_t^2$  para

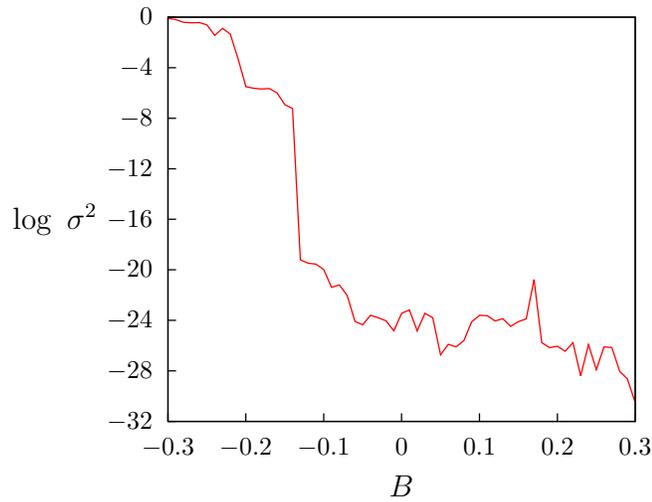


Figura 3.9: Varianza de la red con una perturbación de magnitud  $B \in (-0.30, 0.30)$  aplicada a todos sus elementos siempre

estos tres casos. Nótese que en la figura 3.12a donde se perturba aleatoriamente con probabilidad  $p_2 = 0.50$  a los elementos de la red y con una magnitud  $B = -0.10$  se logra afectar la sincronización de la red. Por otra parte en las figuras 3.12b y 3.12c donde la perturbación que se aplico a los elementos de la red fue  $B = 0.10$ , primero con una probabilidad  $p_2 = 0,20$  y luego aumentado esta a  $p_2 = 0,90$  no se logra afectar de manera significativa el estado de sincronización de la red. En la figura 3.12d se puede observar la evolución de la desviación de los elementos de la red para los tres pares de valores de los parámetros  $B$  y  $p_2$ . En color rojo se tiene la región desincronizada para  $p_2 = 0.50$  y  $B = -0.10$ , en color verde se tiene la región sincronizada con  $p = 0.20$  y  $B = 0.10$  y finalmente en color azul se tiene la región sincronizada para  $p = 0.90$  y  $B = 0.10$ ; que corresponden a lo mostrado en las figuras 3.12a, 3.12b, 3.12c respectivamente.

Al igual que con las estrategias anteriores, con esta se observa que con una perturbación negativa se logra un mayor efecto de pérdida de sincronización de los elementos de la red, como se puede observar en la figura 3.12a. En cambio para perturbaciones positivas, figuras 3.12b y 3.12c, aunque se note una pequeña diferencia entre los estados de los elementos del sistema el efecto más significativo es la pérdida de su comportamiento caótico y excitable.

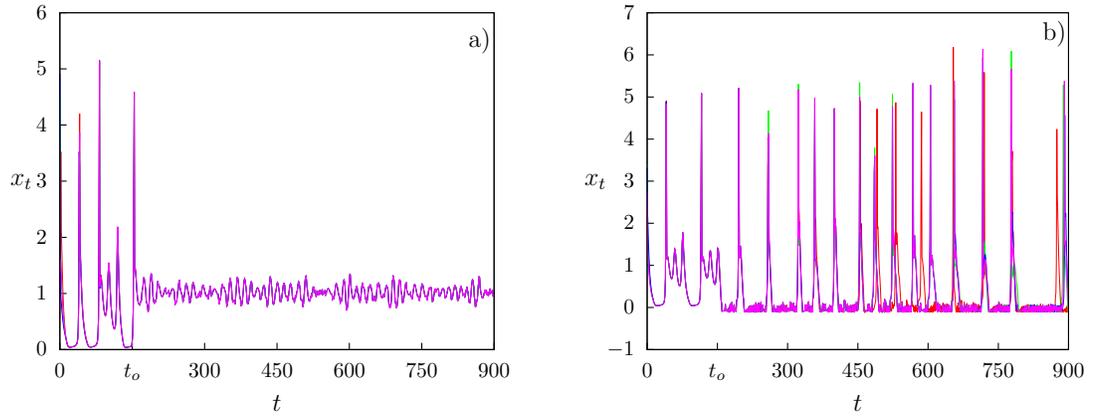


Figura 3.10: Aplicación de una perturbación de magnitud  $B$  constante en  $t_o = 150$ , a todos los elementos con una probabilidad  $p_1 = 0.85$ . a)  $B = 0.10$  b)  $B = -0.15$ .

La figura 3.13 muestra el diagrama de fase de esta estrategia en el espacio de parámetros ( $B$  y  $p_2$ ). Se observa que el estado de sincronización de la variable de activación de los elementos de la red solo se ve afectada con perturbaciones de magnitud negativa, sin embargo el rango de valores que puede tomar esta magnitud es mucho mas amplio y en este caso es mas pequeño, lo cual es una mejoría considerable ya que el choque eléctrico que se aplica a las neuronas es mas débil y basta con aplicarlo solo a algunas de las neuronas de la red en cada iteración para lograr desincronizarlas.

Finalmente combinando las dos estrategias anteriores para la aplicación de una perturbación externa, definidas por las ecuaciones (3.9) y (3.11), se obtiene el modelo

$$\begin{aligned}
 x_{t+1}^i &= (1 - \epsilon)[(y_t^i)^2 e^{y_t^i - x_t^i} + k] + \epsilon \sum_j w_{ij}^j [(y_t^j)^2 e^{y_t^j - x_t^j} + k] + \Theta_t(p_1) \Theta_i(p_2) B \\
 y_{t+1} &= ay_t - bx_t + c
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

donde la perturbación se aplica en el instante de tiempo  $t$  con probabilidad  $p_1$  al elemento  $i$  escogido con probabilidad  $p_2$ . Para esta estrategia se establecieron dos valores para la magnitud de la perturbación  $B = -0.10$  y  $B = 0.10$ .

En la figura 3.14, se tiene que la aplicación de la perturbación  $B$ , para las mag-

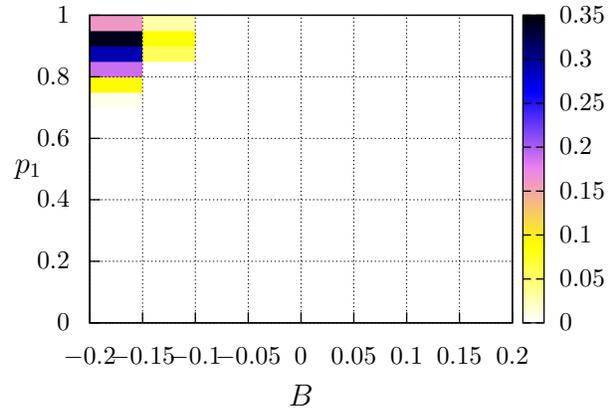


Figura 3.11: Diagrama de fases con la aplicación de una perturbación  $B$  a todos los elementos con probabilidad  $p_1$

nitudes consideradas, nuevamente al igual que en la estrategias anteriores tenemos que una perturbación de magnitud negativa es la que mas afecta el estado de sincronización de la variable de activación de los elementos de la red. Por otro lado aunque los valores de  $\sigma^2$  que se obtienen con una perturbación de magnitud positiva son pequeños, estos son menores que  $10^{-3}$  y puede considerarse que se logro afectar la sincronización en los elementos de la red. Con esta ultima estrategia se logra reducir no solo el numero de neuronas a las cuales se le tiene que aplicar la perturbación para desincronizarlas, si no que se logro reducir la frecuencia con que esta es aplicada en la red de neuronas.

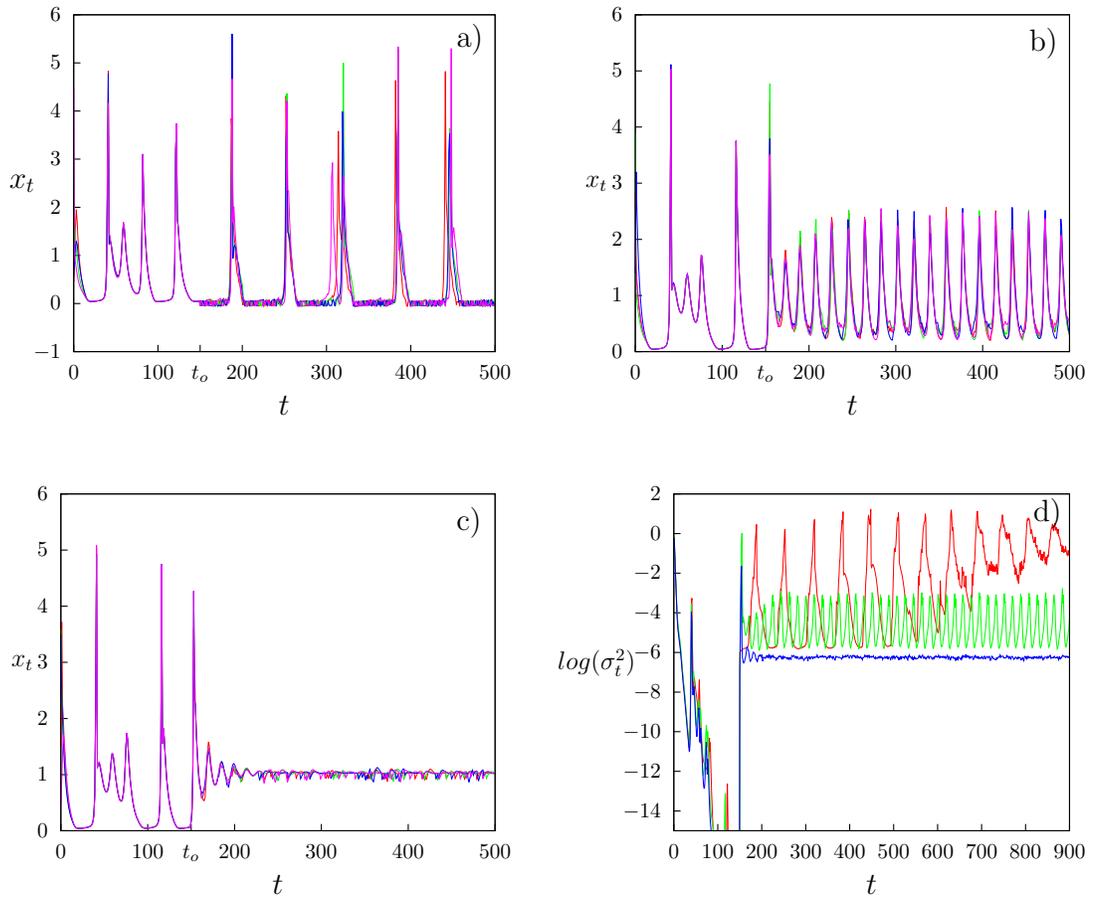


Figura 3.12: Evolución de cuatro elementos de la red en la aplicación de una perturbación con probabilidad  $p_2$  a los elementos de la red. a)  $p_2 = 0.50$  y  $B = -0.10$ . b)  $p_2 = 0.20$  y  $B = 0.10$ . c)  $p_2 = 0.90$  y  $B = 0.10$ . En d) se tiene la varianza de la red en rojo para a) , verde para b) y azul para c)

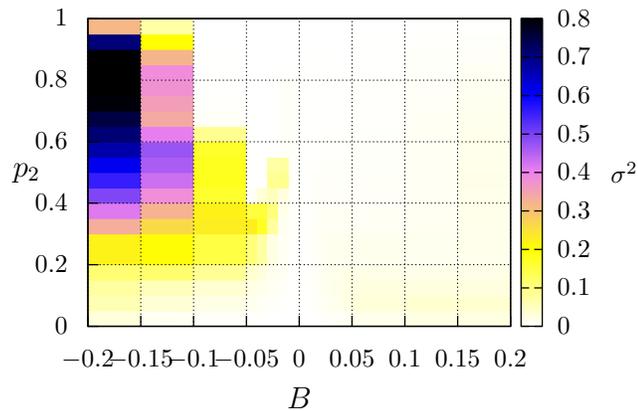


Figura 3.13: Diagrama de fases en el espacio de parámetros  $(B, p_2)$  con la estrategia de aplicar una perturbación siempre a algunos elementos escogidos aleatoriamente con probabilidad  $p_2$  en cada iteración

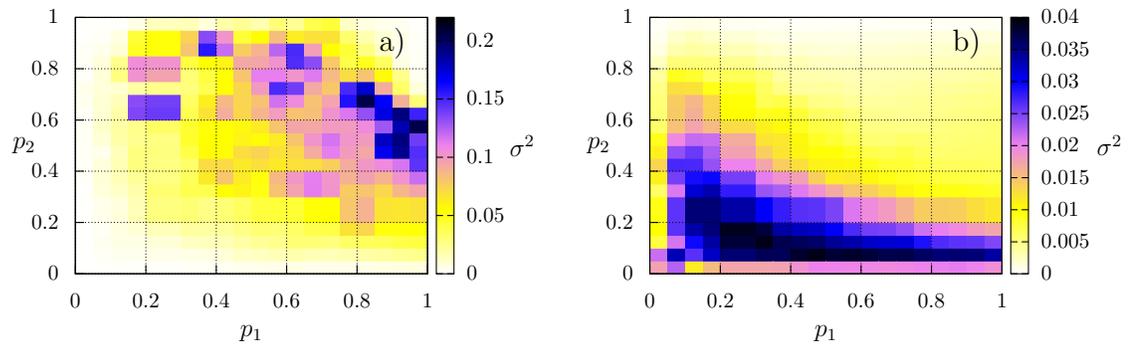


Figura 3.14: Diagrama de fase en el espacio de parámetros  $(p_1, p_2)$  para la cuarta estrategia, se perturba en cada iteración con probabilidad  $p_1$  a algunos elementos escogidos con probabilidad  $p_2$ . a)  $B = -0.10$ . b)  $B = 0.10$ . Note que la escala de colores es diferente para cada una de las figuras

# Capítulo 4

## Conclusión

El estudio de la sincronización representa un desafío fascinante y diverso, capaz de proveer herramientas útiles a cualquier campo de la ciencia en donde éste se manifieste; desde la biología y ecología pasando por la física y la química hasta la sociología y las artes. Nuestro mundo experimenta día a día distintas maneras y formas de interacción que permiten la aparición de sincronías gracias a las conexiones espontáneas de elementos, que tal vez sean imperceptibles pero son suficientes, como para generar un comportamiento de “coincidencia” o “simultaneidad” de diversas maneras.

En particular, el fenómeno de sincronización esta presente en el cerebro humano; que es un órgano estructura compleja, compuesto por una infinidad de neuronas que mediante su interacción cumple con sus tareas perfectamente ejecutadas, en un sin fin de funciones que necesita un organismo vivo para su óptimo rendimiento y plenitud de sus capacidades. En él la sincronización se encuentra presente como recurso vital en las funciones del sistema nervioso central surgiendo en muchas de las habilidades indispensables que requiere el ser humano para vivir en virtuosismo y comodidad.

Por otra parte, la manifestación de sincronización en las redes neuronales del cerebro también se relaciona con algunas disfunciones de los procesos de desarrollo cognitivo y motor como en la epilepsia, la esquizofrenia y el párkinson, entre otras patologías neurológicas.

En este trabajo se estudió la dinámica de una red de neuronas mediante la construcción de una red de mapas caóticos acoplados donde cada neurona está repre-

sentada por un oscilador caótico y excitable, propuesto por Chialvo, mientras que las interconexiones siguen una dinámica de pesos Hebbiana, controlada mediante la variación de los parámetros de plasticidad  $\delta$  y la fuerza de acoplamiento entre los elementos  $\epsilon$ . Con el modelo se encontró que el estado de sincronización de la red está fuertemente ligado al acoplamiento que existe entre sus elementos mientras que depende en menor proporción de la plasticidad que la red neuronal presente.

Para estudiar el efecto que tiene un campo externo sobre el sistema sincronizado, se sometió a una red neuronal a una perturbación siguiendo cuatro estrategias en primer lugar se aplicó una perturbación de magnitud constante a todos los elementos de la red en cada iteración, y se determinó que es posible desincronizar los elementos de la red para ciertos valores de la magnitud de la perturbación, ver figura 3.9, manteniendo en las neuronas su característica de ser caóticas y excitables.

Aunque con la primera estrategia fue suficiente para lograr el objetivo de desincronizar la red, ésta requiere de la aplicación de una perturbación relativamente grande, a todas las neuronas y de manera constante; lo cual implicaría en la vida real a someter al cerebro a un choque eléctrico en todo momento. Mediante las otras tres estrategias se busca intervenir menos en la red neuronal se propuso reducir la magnitud de la perturbación, su frecuencia y el número de elementos a los cuales se les aplica.

Como nuestra segunda estrategia se sometió a la red de neuronal a una perturbación que afecta a todos los elementos pero ahora con cierta frecuencia y, aunque no se obtuvieron resultados significativos con respecto a la reducción del valor de la magnitud de la perturbación, se demuestra que es posible desincronizar la red sin la necesidad de aplicar la perturbación en todo momento, como lo muestra la figura 3.11, lo cual resulto ser una mejora considerable con respecto a la anterior estrategia.

Buscando de reducir la cantidad de elementos a los cuales se perturban, la tercera estrategia consiste en seleccionar con cierta probabilidad en cada iteración a los elementos que son sometidos a la perturbación. En este caso se encontró que es posible desincronizar la red sin necesidad de afectar a todos los elementos de la red, logrando también una reducción del valor de la magnitud de la perturbación, como se ve en la figura 3.13. Finalmente combinando la segunda y la tercera estrategia, resulto en una cuarta y última estrategia con la cual se logra de manera efectiva

desincronizar la red, como se ve en la figura 3.14 ,afectando a algunas neuronas a veces, siendo así la que resulta ser la menos invasiva.

La aplicación de perturbaciones externas a una red neuronal, siguiendo las estrategias planteadas en este trabajo, demostró ser capaz de afectar y mantener desincronizados los elementos de la red que espontáneamente se encuentra en fase sincronizada. De esta manera podemos decir que este planteamiento teórico puede ayudar en el diseño de un marcapasos cerebral que eviten el estado de sincronización relacionado a alguna patología neurológica como lo son la epilepsia, la esquizofrenia y el párkinson.

# Bibliografía

- [1] Henry DI Abarbanel, Nikolai F Rulkov, y Mikhail M Sushchik. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach. *Physical Review E*, 53(5):4528, 1996.
- [2] Iria Alvarez-Silva, Javier Alvarez-Rodriguez, Sergio Alvarez-Silva, MJ Perez-Echeverria, y Antonio Campayo-Martínez. Melancholic major depression and epilepsy. *Medical hypotheses*, 69(5):1046–1053, 2007.
- [3] Iria Alvarez-Silva, Sergio Alvarez-Silva, y Javier Alvarez-Rodriguez. Positive syndrome of schizophrenia and epilepsy. *Medical hypotheses*, 74(2):294–296, 2010.
- [4] S Alvarez-Silva, J Alvarez-Rodriguez, MJ Perez-Echeverria, y I Alvarez-Silva. Panic and epilepsy. *Journal of anxiety disorders*, 20(3):353–362, 2006.
- [5] Alex Arenas, Albert Díaz-Guilera, Jurgen Kurths, Yamir Moreno, y Changsong Zhou. Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 469(3):93–153, 2008.
- [6] Apostolos Argyris, Dimitris Kanakidis, Adonis Bogris, y Dimitris Syvridis. Spectral synchronization in chaotic optical communication systems. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 41(6):892–897, 2005.
- [7] Marcel Bastiaansen y Peter Hagoort. Oscillatory neuronal dynamics during language comprehension. *Progress in brain research*, 159:179–196, 2006.
- [8] Eric N Best. Null space in the hodgkin-huxley equations. a critical test. *Biophysical journal*, 27(1):87, 1979.

- [9] Bernd Blasius y Lewi Stone. Ecology: nonlinearity and the moran effect. *Nature*, 406(6798):846–847, 2000.
- [10] Stefano Boccaletti, Jürgen Kurths, Grigory Osipov, DL Valladares, y CS Zhou. The synchronization of chaotic systems. *Physics reports*, 366(1):1–101, 2002.
- [11] Michael Breakspear, Stewart Heitmann, y Andreas Daffertshofer. Generative models of cortical oscillations: neurobiological implications of the kuramoto model. *Front. Hum. Neurosci*, 4(190):10–3389, 2010.
- [12] RM Buijs, CG Van Eden, VD Goncharuk, y A Kalsbeek. The biological clock tunes the organs of the body: timing by hormones and the autonomic nervous system. *Journal of Endocrinology*, 177(1):17–26, 2003.
- [13] György Buzsáki y Andreas Draguhn. Neuronal oscillations in cortical networks. *science*, 304(5679):1926–1929, 2004.
- [14] Joana Cabral, Henry Luckhoo, Mark Woolrich, Morten Joensson, Hamid Mohseni, Adam Baker, Morten L Kringelbach, y Gustavo Deco. Exploring mechanisms of spontaneous functional connectivity in meg: how delayed network interactions lead to structured amplitude envelopes of band-pass filtered oscillations. *Neuroimage*, 90:423–435, 2014.
- [15] Joyce L Chen, Virginia B Penhune, y Robert J Zatorre. Moving on time: brain network for auditory-motor synchronization is modulated by rhythm complexity and musical training. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 20(2):226–239, 2008.
- [16] Dante R Chialvo. Generic excitable dynamics on a two-dimensional map. *Chaos, Solitons & Fractals*, 5(3):461–479, 1995.
- [17] Dante R Chialvo y Per Bak. Learning from mistakes. *Neuroscience*, 90(4):1137–1148, 1999.
- [18] MG Cosenza y J González. Synchronization and collective behavior in globally coupled logarithmic maps. *Progress of Theoretical Physics*, 100(1):21–38, 1998.

- [19] D Cumin y CP Unsworth. Generalising the kuramoto model for the study of neuronal synchronisation in the brain. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 226(2):181–196, 2007.
- [20] Krzysztof Czołczynski, Przemysław Perlikowski, Andrzej Stefanski, y Tomasz Kapitaniak. Huygensódd sympathy experiment revisited. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(07):2047–2056, 2011.
- [21] Penny K Davis, Alan Ho, y Steven F Dowdy. Biological methods for cell-cycle synchronization of mammalian cells. *Biotechniques*, 30(6):1322–1331, 2001.
- [22] Guilherme Nogueira M de Oliveira, Arthur Kummer, João Vinícius Salgado, Gerardo Maria de Araujo Filho, Anthony S David, y Antonio Lucio Teixeira. Suicidality in temporal lobe epilepsy: Measuring the weight of impulsivity and depression. *Epilepsy & Behavior*, 22(4):745–749, 2011.
- [23] DJ DeCastro y K Tucci. Chaotic synchronization on directed networks. En *Journal of Physics: Conference Series*, tomo 246, pág. 012010. IOP Publishing, 2010.
- [24] Judith M Ford, John H Krystal, y Daniel H Mathalon. Neural synchrony in schizophrenia: from networks to new treatments. *Schizophrenia bulletin*, 33(4):848–852, 2007.
- [25] Howard Giles, Nikolas Coupland, y IUSTINE Coupland. 1. accommodation theory: Communication, context, and. *Contexts of accommodation: Developments in applied sociolinguistics*, 1, 1991.
- [26] Carlos A. Logatt Grabner. Neuroplasticidad y redes hebbianas: las bases del aprendizaje. *Asociación Educar*, 2014.
- [27] Wang Hai-Xia, Lu Qi-Shao, y Wang Qing-Yun. Complete synchronization in coupled chaotic hr neurons with symmetric coupling schemes. *Chinese Physics Letters*, 22(9):2173, 2005.
- [28] Donald Olding Hebb. *The organization of behavior: A neuropsychological theory*. Psychology Press, 2005.

- [29] Tilmann Heil, Ingo Fischer, Wolfgang Elsässer, Josep Mulet, y Claudio R Mirasso. Chaos synchronization and spontaneous symmetry-breaking in symmetrically delay-coupled semiconductor lasers. *Physical Review Letters*, 86(5):795, 2001.
- [30] Jose Luis Herrera, Mario G Cosenza, K Tucci, y Juan Carlos González-Avella. General coevolution of topology and dynamics in networks. *EPL (Europhysics Letters)*, 95(5):58006, 2011.
- [31] Robert C Hilborn, Susan Coppersmith, A John Mallinckrodt, Susan McKay, et al. Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers. *Computers in Physics*, 8(6):689–689, 1994.
- [32] Brian R Hunt, Edward Ott, y James A Yorke. Differentiable generalized synchronization of chaos. *Physical Review E*, 55(4):4029, 1997.
- [33] Junji Ito y Kunihiko Kaneko. Self-organization of network structure in coupled-map systems. En *Adaptive Networks*, págs. 137–163. Springer, 2009.
- [34] Maruthi Pradeep Kanth Jampa, Abhijeet R Sonawane, Prashant M Gade, y Sudeshna Sinha. Synchronization in a network of model neurons. *Physical Review E*, 75(2):026215, 2007.
- [35] Neeraj Kumar Kamal y Sudeshna Sinha. Emergent patterns in interacting neuronal sub-populations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22(1):314–320, 2015.
- [36] Kunihiko Kaneko. *Theory and applications of coupled map lattices*, tomo 12. John Wiley & Son Ltd, 1993.
- [37] Kunihiko Kaneko et al. Simulating physics with coupled map lattices. *Formation, Dynamics, and Statistics of Patterns*, 1:1–54, 1990.
- [38] Hassan K Khalil y JW Grizzle. *Nonlinear systems*, tomo 3. Prentice hall New Jersey, 1996.
- [39] Wolfgang Klimesch. Memory processes, brain oscillations and eeg synchronization. *International Journal of Psychophysiology*, 24(1):61–100, 1996.

- [40] G Kraepelin. At winfree, the geometry of biological time (biomathematics, vol. 8). 530 s., 290 abb. berlin-heidelberg-new-york 1980. springer-verlag. dm 59, 50. *Zeitschrift für allgemeine Mikrobiologie*, 21(10):774–774, 1981.
- [41] Yoshiki Kuramoto. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. En *International symposium on mathematical problems in theoretical physics*, págs. 420–422. Springer, 1975.
- [42] Orlando Alvarez Llamaza. Sincronización generalizada y comportamientos colectivos en sistemas forzados y en sistemas autónomos.
- [43] Edward Lorenz. *Essence of chaos*. 1996.
- [44] Edward N Lorenz. *The essence of chaos*. University of Washington Press, 1995.
- [45] Jianquan Lu y Jinde Cao. Adaptive complete synchronization of two identical or different chaotic (hyperchaotic) systems with fully unknown parameters. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 15(4):043901, 2005.
- [46] Yuri Maistrenko y Tomasz Kapitaniak. Different types of chaos synchronization in two coupled piecewise linear maps. *Physical Review E*, 54(4):3285, 1996.
- [47] Elizabeth S Maywood, Akhilesh B Reddy, Gabriel KY Wong, John S O’Neill, John A O’Brien, Douglas G McMahon, Anthony J Harmar, Hitoshi Okamura, y Michael H Hastings. Synchronization and maintenance of timekeeping in suprachiasmatic circadian clock cells by neuropeptidergic signaling. *Current Biology*, 16(6):599–605, 2006.
- [48] Louis M Pecora y Thomas L Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Physical review letters*, 64(8):821, 1990.
- [49] Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum, y Jürgen Kurths. *Synchronization*. Nº 12 en Cambridge Nonlinear Science Series. University Cambridge Press, 2001.
- [50] MI Rabinovich y HDI Abarbanel. The role of chaos in neural systems. *Neuroscience*, 87(1):5–14, 1998.

- [51] Daniel C Richardson, Rick Dale, y Kevin Shockley. Synchrony and swing in conversation: coordination, temporal dynamics, and communication. *Embodied communication*, págs. 75–94, 2008.
- [52] Michael G Rosenblum, Arkady S Pikovsky, y Jürgen Kurths. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, 78(22):4193, 1997.
- [53] Nikolai F Rulkov. Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map. *Physical Review E*, 65(4):041922, 2002.
- [54] Nikolai F Rulkov, Mikhail M Sushchik, Lev S Tsimring, y Henry DI Abarbanel. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Physical Review E*, 51(2):980, 1995.
- [55] Diego Rybski, Shlomo Havlin, y Armin Bunde. Phase synchronization in temperature and precipitation records. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 320:601–610, 2003.
- [56] Carsten Schäfer, Michael G Rosenblum, Hans-Henning Abel, y Jürgen Kurths. Synchronization in the human cardiorespiratory system. *Physical Review E*, 60(1):857, 1999.
- [57] Wolf Singer. Synchronization of cortical activity and its putative role in information processing and learning. *Annual review of physiology*, 55(1):349–374, 1993.
- [58] Wolf Singer. Synchronization of cortical activity and its putative role in information processing and learning. *Annual review of physiology*, 55(1):349–374, 1993.
- [59] Wolf Singer. Neuronal synchrony: a versatile code for the definition of relations? *Neuron*, 24(1):49–65, 1999.
- [60] Christos H Skiadas y Charilaos Skiadas. *Chaotic modelling and simulation: analysis of chaotic models, attractors and forms*. CRC Press, 2008.

- [61] S. H. Strogatz. Arthur t. winfree obituary. *SIAM News*, 36(1), 2003.
- [62] Steven H Strogatz. From kuramoto to crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 143(1):1–20, 2000.
- [63] Saeed Taherion y Ying-Cheng Lai. Observability of lag synchronization of coupled chaotic oscillators. *Physical Review E*, 59(6):R6247, 1999.
- [64] Atsushi Uchida, Fabien Rogister, Jordi Garcia-Ojalvo, y Rajarshi Roy. Synchronization and communication with chaotic laser systems. *Progress in optics*, 48:203, 2005.
- [65] Peter J Uhlhaas y Wolf Singer. Neural synchrony in brain disorders: relevance for cognitive dysfunctions and pathophysiology. *Neuron*, 52(1):155–168, 2006.
- [66] Sundarapandian Vaidyanathan. Adaptive synchronization of generalized lotka-volterra three-species biological systems. *Int J PharmTech Res*, 8(5):928–937, 2015.
- [67] Francisco J Varela. Resonant cell assemblies: a new approach to cognitive functions and neuronal synchrony. *Biological research*, 28(1):81–95, 1994.
- [68] RP Vertes. An analysis of ascending brain stem systems involved in hippocampal synchronization and desynchronization. *Journal of Neurophysiology*, 46(5):1140–1159, 1981.
- [69] Sabine Weiss y Horst M Mueller. The contribution of eeg coherence to the investigation of language. *Brain and language*, 85(2):325–343, 2003.
- [70] Sabine Weiss y Peter Rappelsberger. Left frontal eeg coherence reflects modality independent language processes. *Brain Topography*, 11(1):33–42, 1998.
- [71] Norbert Wiener. *Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine*, tomo 25. MIT press, 1961.
- [72] Arthur T Winfree. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Journal of theoretical biology*, 16(1):15–42, 1967.

- [73] Arthur T Winfree. *The geometry of biological time*, tomo 12. Springer Science & Business Media, 2001.
- [74] Chai Wah Wu y Leon O Chua. A unified framework for synchronization and control of dynamical systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4(04):979–998, 1994.
- [75] Tao Yang y Leon O Chua. Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic systems: theory and application to secure communication. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 44(10):976–988, 1997.
- [76] Gang Zhang, Zengrong Liu, y Zhongjun Ma. Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 32(2):773–779, 2007.