TIPE: Le problème brachistochrone

Arnaud Schott, Louis Péan

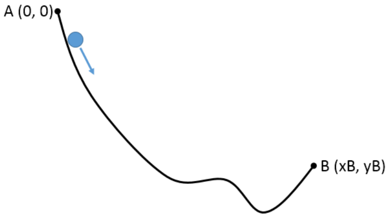
Épreuve de TIPE

Session 2018

Plan de l'exposé

Introduction

Présentation du problème



Un peu d'histoire

Johann Bernoulli

- Du grec "brakhisto" et "kronos" qui signifient "le temps le plus court".
- 1638 : Galilée propose l'arc de cercle.
- Jean Bernoulli pose clairement le problème en juin 1696 dans les Acta Eruditorum.

Un peu d'histoire

Johann Bernoulli

- Du grec "brakhisto" et "kronos" qui signifient "le temps le plus court".
- 1638 : Galilée propose l'arc de cercle.
- Jean Bernoulli pose clairement le problème en juin 1696 dans les Acta Eruditorum.

Un peu d'histoire

Johann Bernoulli

- Du grec "brakhisto" et "kronos" qui signifient "le temps le plus court".
- 1638 : Galilée propose l'arc de cercle.
- Jean Bernoulli pose clairement le problème en juin 1696 dans les Acta Eruditorum.

Modèle

Analogie avec la lumière

- **Principe de Fermat :** la lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours est minimale.
- **Loi de la réfraction de Descartes :**

$$n_1 sin(\theta_1) = n_2 sin(\theta_2)$$

Modèle

Analogie avec la lumière

- **Principe de Fermat :** la lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours est minimale.
- **Loi de la réfraction de Descartes :**

$$n_1 sin(\theta_1) = n_2 sin(\theta_2)$$

Modèle

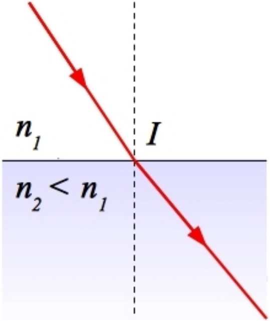
Analogie avec la lumière

- **Principe de Fermat :** la lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours est minimale.
- **Loi de la réfraction de Descartes :**

$$n_1 sin(\theta_1) = n_2 sin(\theta_2)$$

Modèle

Équations differentielles de la courbe brachistochrone



- On a par la loi de la réfraction de Descartes

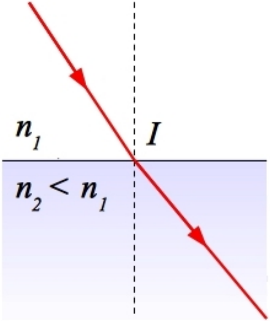
$$\frac{\sin(\theta)}{v} = \frac{1}{v_{max}}$$

- La conservation de l'énergie mécanique implique

$$v = \sqrt{2gy}$$

Modèle

Équations differentielles de la courbe brachistochrone



- On a par la loi de la réfraction de Descartes

$$\frac{\sin(\theta)}{v} = \frac{1}{v_{max}}$$

- La conservation de l'énergie mécanique implique

$$v = \sqrt{2gy}$$

D'où l'égalité

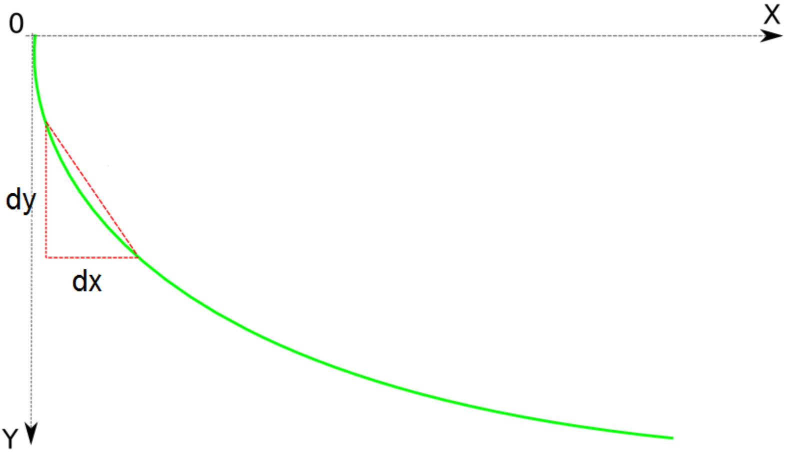
$$\frac{\sin(\theta)}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2gD}}$$

Sachant que la particule se déplace le long d'une courbe

$$\sin(\theta) = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

On obtient finalement l'équation différentielle de la courbe brachistochrone

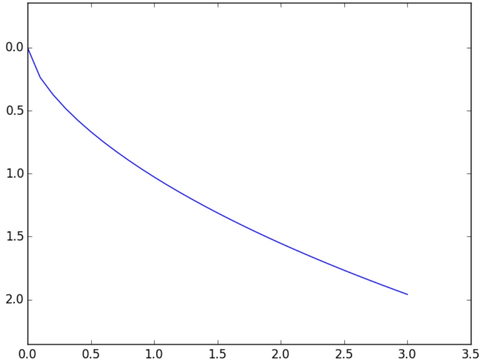
$$\boxed{y(x)(1 + \dot{y}(x)^2) = D}$$


0
X
dy
dx
Y

La révelation

Une courbe singulière

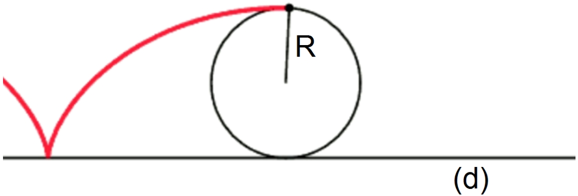
Une intégration par la méthode d'Euler permet de voir la courbe brachistochrone.



Rappel

Qu'est-ce qu'une cycloïde ?

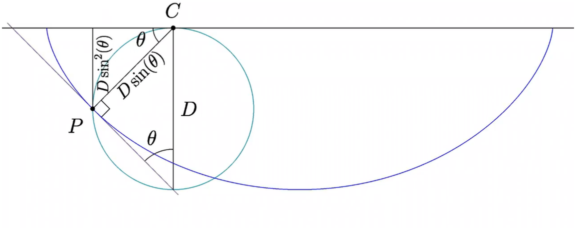
La cycloïde est la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon R roulant sans glisser sur une droite (d)



Démonstration

Identification de la cycloïde

On définit la hauteur y entre le point P et l'horizontale.



- on obtient la relation

$$y = D\sin^2(\theta)$$

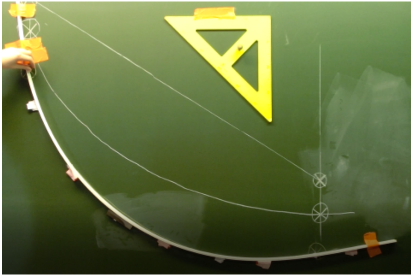
$$\frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{\sin(\theta)}{\sqrt{y}} = C^{te}$$

La courbe brachistochrone est théoriquement un morceau de cycloïde.

Protocole expérimental

et autres galères...

Matériel pour la fabrication du rail : un vidéoprojecteur, un tableau, un cache de goulotte, du scotch.
Il y a deux points de contact entre la bille et le rail.



Premiers résultats

Temps de parcours

Mesurons les temps de descente de la bille sur les différentes trajectoires.

- Pour la cycloïde : 0.77 secondes
- Pour l'arc de cercle : 0.77 secondes
- Pour la droite : 0.97 secondes
- **Notre expérience n'a pas permis de confirmer la théorie**

Premiers résultats

Temps de parcours

Mesurons les temps de descente de la bille sur les différentes trajectoires.

- Pour la cycloïde : 0.77 secondes
- Pour l'arc de cercle : 0.77 secondes
- Pour la droite : 0.97 secondes
- **Notre expérience n'a pas permis de confirmer la théorie**

Premiers résultats

Temps de parcours

Mesurons les temps de descente de la bille sur les différentes trajectoires.

- Pour la cycloïde : 0.77 secondes
- Pour l'arc de cercle : 0.77 secondes
- Pour la droite : 0.97 secondes
- **Notre expérience n'a pas permis de confirmer la théorie**

Premiers résultats

Temps de parcours

Mesurons les temps de descente de la bille sur les différentes trajectoires.

- Pour la cycloïde : 0.77 secondes
- Pour l'arc de cercle : 0.77 secondes
- Pour la droite : 0.97 secondes
- **Notre expérience n'a pas permis de confirmer la théorie**

Recherche de solution

Facteurs influençant les mesures

Pluieurs paramètres sont à prendre en compte dans la non conformité des résultats attendus :

- la considération de la bille comme point matériel.
- les forces de frottements liées au déplacement de la bille sur le rail et avec l'air.
- les moyens de mesure qui par leur résolution ne permettent pas une précsion suffisante compte tenu de la vitesse de déplacemnt de la bille sur le rail.

Recherche de solution

Facteurs influençant les mesures

Pluieurs paramètres sont à prendre en compte dans la non conformité des résultats attendus :

- la considération de la bille comme point matériel.
- les forces de frottements liées au déplacement de la bille sur le rail et avec l'air.
- les moyens de mesure qui par leur résolution ne permettent pas une précsion suffisante compte tenu de la vitesse de déplacemnt de la bille sur le rail.

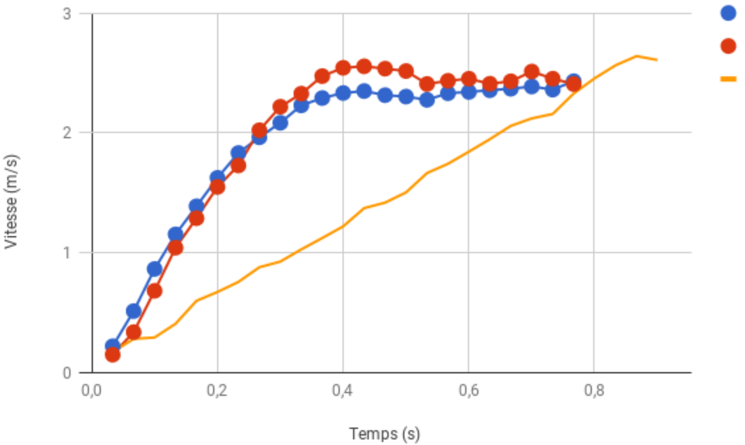
Recherche de solution

Facteurs influençant les mesures

Pluieurs paramètres sont à prendre en compte dans la non conformité des résultats attendus :

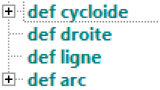
- la considération de la bille comme point matériel.
- les forces de frottements liées au déplacement de la bille sur le rail et avec l'air.
- les moyens de mesure qui par leur résolution ne permettent pas une précsion suffisante compte tenu de la vitesse de déplacemnt de la bille sur le rail.

Le logiciel de pointage vidéo a permis de déduire la vitesse de la bille en coordonnées cartésiennes. Rouge : Quart de cercle, Bleu : cycloïde, Orange : droite



Le code informatique

Un peu de Python




```
#g = 9.81
#x2, y2 = 1.2, 0.72
Running script: "E:\cycloide.py"
temps(cycloide) = 0.61 sec
temps(droite) = 0.73 sec
temps(arc) = 0.63 sec
```

Et maintenant

Bilan

La solution du problème n'a pas pu être vérifiée expérimentalement, mais la modélisation numérique a elle, bien confirmé cela pour nos trois courbes particulières. Il serait intéressant par la suite, de réussir à modéliser une grande quantité de courbe réalisant le trajet, afin de vérifier plus précisément nos résultats.

Pistes d'exploration et amélioration du modèle

prise en compte du moment d'inertie

On souhaite davantage se rapprocher des valeurs trouvées expérimentalement : Equation paramétrique de la cycloïde de rayon R :

$$x = R(\theta - \sin(\theta))$$

$$y = R(1 - \cos(\theta))$$

on intègre entre les points A et B :

$$\int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{v}$$

et en prenant :

$$ds = R\sqrt{2(1 - \cos(\theta))}d\theta$$

Pistes d'exploration et amélioration du modèle

prise en compte du moment d'inertie

$$v = \sqrt{2gR(i - \cos(\theta))}$$

Au final on a accès au temps de parcours

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\theta_B} d\theta = \sqrt{\frac{R}{g}} \theta_B$$

En considérant maintenat la bille qui roule, il faut ajouter un terme dans l'expression de l'énergie cinétique, à savoir :

$$Ec = \frac{1}{2}(m + \frac{2}{5}m)v^2$$

Pistes d'exploration et amélioration du modèle

prise en compte du moment d'inertie

Ce qui permet d'obtenir après calcul

$$t_{roule} = \sqrt{\frac{7}{5}}t = \sqrt{\frac{7}{5}}\sqrt{\frac{R}{g}}\theta$$

L'application numérique donne

$$t_{roule} = \sqrt{\frac{7}{5}}\sqrt{\frac{0.37}{9.81}}\pi = 0.72s$$

$$t_{roule} \simeq t_{exprimental}$$